

Mecánica de fluidos



Guía de estudio

Alejandro Muñoz Rodríguez



UNIVERSIDAD
CENTRAL



**UNIVERSIDAD
CENTRAL**
FACULTAD DE INGENIERÍA
Y CIENCIAS BÁSICAS
Departamento de Ingeniería Mecánica

Mecánica de fluidos

Guía de estudio

Alejandro Muñoz Rodríguez

Bogotá D. C., agosto de 2020



UNIVERSIDAD CENTRAL

COMITÉ EDITORIAL DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA Y CIENCIAS BÁSICAS

Sandra Milena Gamboa Moreno
Aliex Trujillo G.
Adolfo José Naranjo Parra
Gastón Mejía Arias
Leticia Fernández Marín
Héctor Sanabria Rivera

Rector

Jaime Arias Ramírez

Vicerrector académico

Óscar Leonardo Herrera Sandoval

Vicerrectora administrativa y financiera

Paula Andrea López López

Esta es una publicación del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas.

Adolfo Naranjo Parra
Decano

Pedro William Pérez Orozco
Director del Departamento de Ingeniería Mecánica

ISBN (PDF): 978-958-26-0469-1

Primera edición: Bogotá, 2020

© Alejandro Muñoz Rodríguez
© Ediciones Universidad Central
Calle 21 n.º 5-84 (4.º piso).
Bogotá, D. C., Colombia
PBX: 323 98 68, ext. 1556
editorial@ucentral.edu.co

Catalogación en la Publicación Universidad Central

Muñoz Rodríguez, Alejandro, 1973-, autor.

Mecánica de fluidos : guía de estudio / Alejandro Muñoz Rodríguez -- Primera edición

-- Bogotá : Ediciones Universidad Central, 2020.

1 recurso en línea (104 páginas) : ilustraciones.

Incluye referencias bibliográficas.

ISBN: 978-958-26-0469-1 (PDF)

1. Mecánica de fluidos - Problemas, ejercicios, etc. 2. Dinámica de fluidos Problemas, ejercicios, etc. 3. Ingeniería hidráulica - Problemas, ejercicios, etc. 4. Hidrostática - Problemas, ejercicios, etc. I. Universidad Central (Bogotá, Colombia). Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas. Departamento de Ingeniería Mecánica.

620.106 – dc23

PTBUC/28-08-2020

Coordinación Editorial

Editor: Héctor Sanabria Rivera
Asistente editorial: Nicolás Rojas Sierra
Diseño y diagramación: Patricia Salinas Garzón
Corrección de textos: Diana Trujillo Rodríguez
Cubierta: Patricia Salinas Garzón

Imagen de cubierta: pixabay.com y freepik.es

Edición de circulación restringida y gratuita, para uso exclusivo en los cursos de la Universidad Central.

Prohibida la reproducción o transformación total o parcial de este material por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Contenido

Prefacio.....	5
1, Fundamentos de la mecánica de fluidos	9
Definición de un fluido	9
Constitución microscópica de un fluido	9
Concepto del fluido como medio continuo	10
Propiedades, unidades y dimensiones.....	11
Sistemas de unidades: breve historia	12
Sistema Internacional de Unidades (SI)	13
Sistema inglés de unidades.....	15
Sistema americano y sistema británico o imperial	15
Unidades de longitud.....	16
Unidades de área	16
Unidades de masa y unidades de fuerza.	
Sistemas gravitacionales	17
Definición de libra-masa y libra-fuerza	18
Conversión de unidades	19
2. Propiedades de los fluidos	23
Densidad, volumen específico y gravedad específica	23
Peso específico	25
Viscosidad	26
Tensión superficial	35
Capilaridad.....	38
Tensión superficial: gotas y burbujas	39
3. Estática de fluidos (hidrostática).....	40
Presión absoluta, de vacío y manométrica.....	41
Presión en un punto.....	42
Variación de la presión con la profundidad.....	42

Principio de Pascal	45
Piezometría	46
Flotabilidad	52
Fuerzas sobre superficies planas sumergidas	53
Estrategia de solución	54
Determinación de la magnitud de la fuerza resultante .	54
Determinación del punto de aplicación de la fuerza resultante (centro de presiones)	54
Fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas	55
4. Hidrodinámica. Ecuaciones de conservación.....	67
Ecuaciones de conservación de la masa (volumen de control)	67
Ecuación de Bernoulli	69
Ecuación de Bernoulli en términos de energía específica...	70
Ecuación de Bernoulli en términos de presión	71
Ecuación de Bernoulli en términos de alturas (cabezas o distancias).....	74
Ecuación de la energía	75
Conservación de la cantidad de movimiento	81
5. Pérdidas hidráulicas	91
Pérdidas en tuberías	91
Flujo turbulento.....	95
Pérdidas en accesorios	98
Bibliografía.....	103

Prefacio

Este documento es el resultado de mi trabajo por cerca de diez años como profesor en la asignatura Mecánica de Fluidos, ofrecida por el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas de la Universidad Central.

Aún recuerdo la primera asignación de esta asignatura en mi carga académica. Venía de desempeñarme como profesor auxiliar del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, en el área de diseño y en ejercicio de asignaturas un poco más “aplicadas”. Me resultó particularmente paradójico que me asignaran una materia en la cual no era precisamente un especialista; sin embargo, empecé la preparación del curso y lo fui estudiando cada vez más. Con cada ejercicio semestral me he dado cuenta de que lo que era confuso inicialmente, con la lectura continua y repetitiva se ha ido asimilando y finalmente entendiendo; además, se ha convertido casi en una pasión.

Creo que todo en la vida tiene que ver con la mecánica de fluidos: los desarrollos de las grandes máquinas, los fenómenos naturales, incluso la vida misma, dependen de unos sencillos principios que fueron descubiertos en tiempos inmemoriales de la humanidad. Estos sencillos principios tienen expresiones complejas que describen fenómenos asombrosos, pero simplemente son una nueva representación (avanzada) de unos principios muy elementales. Esto indica que es una materia eminentemente conceptual, y el éxito o fracaso de un estudiante tanto novato como avanzado depende de la aplicación o el olvido de esta característica.

Si se desea dominar esta materia, también es claro que se requiere práctica y ejercicio. Un buen jugador de fútbol no se hace solamente viendo juegos en la televisión; es necesario que juegue partidos en donde sus derrotas o victorias se conviertan en experiencias que le ayuden a adquirir destreza. Es lo mismo con la mecánica de fluidos (y cualquier otra asignatura): el dominio solo se adquiere en la medida en que se desarrollan ejercicios y prácticas donde se pone a prueba la claridad conceptual adquirida con la asimilación de la teoría.

Mi desempeño en esta asignatura me ha revelado también algo que puede parecer obvio, pero parece que no es entendido por todos: el desarrollo y el entendimiento de la mecánica de fluidos están ligados a un componente experimental que presenta no solamente hasta dónde tiene aplicación la teoría, sino también cómo la experimentación puede construir andamiaje teórico. Son muchos los ejemplos de esto en el desarrollo de la mecánica de fluidos: la aerodinámica, el cálculo de pérdidas en tuberías y muchos otros campos de aplicación que construyen sus formulaciones a partir de resultados experimentales.

También debo aceptar una crítica que mis estudiantes me hacen: no desarrollo muchos ejercicios en el tablero. Se podría pensar que no he desarrollado muchos ejercicios, pero la realidad es que he desarrollado bastantes: preparando temáticas, diseñando exámenes, preparando laboratorios; escenarios donde, con el correr de los años, se van resolviendo una gran cantidad de ejercicios que pueden ser útiles si se presentan. Sin embargo, por motivos de tiempo, no es posible presentarlos todos durante el desarrollo del curso, debido a que, en mi criterio, la presentación de un ejercicio como ejemplo debe hacerse en forma detallada. Presentar un ejercicio es incluso un escenario en el que se pueden explorar variantes y mirar cómo cambian las respuestas previas en función de cambios en las condiciones iniciales del ejercicio. En esto se puede emplear todo el espacio destinado a una sesión, pero para la siguiente ya se debe continuar con otra temática. Por ello no se desarrollan más.

También por motivos de tiempo, no he pasado muchos de los ejercicios resueltos a formato de presentación, y se han quedado en mi archivo personal en forma de notas y apuntes en borrador. Algunas de estas soluciones hacen parte integral de este documento, que busca presentarlos a los estudiantes para solventar ese vacío que manifiestan.

Sin embargo, me gustaría aclarar algo: el estudiante que se limita a estudiar ejercicios resueltos es, para volver a la metáfora, como el futbolista que solo se entrena viendo partidos en televisión. Solo en la medida en que se aborden problemas personalmente, aceptando el reto de forma crítica —es decir, evaluando metódicamente los razonamientos, revisando posibles nuevas estrategias y procedimientos, y evaluando la obtención de los resultados por otras alternativas—, se puede lograr la asimilación de los conceptos con el estudio de unos pocos ejercicios. Estudiar ejercicios resueltos es una alternativa interesante para la mayoría de los estudiantes que cursan carreras en nuestra institución, y que con mucha frecuencia tienen dificultades de tiempo para preparar sus asignaturas. Por ello prefieren el estudio de problemas resueltos, pensando que esto les permite minimizar el tiempo de estudio, pero están en un error al optar por ello exclusivamente. Lo que deben buscar es garantizar una asimilación rápida de los conceptos.

Esto se logra primero con el estudio de la teoría, lo cual implica lectura de textos y deducciones, y luego la verificación de algunos ejemplos resueltos. Pero esta verificación solo funciona si se aborda como un ejercicio deductivo y sistemático, y no como un ejercicio memorístico.

También es importante aclarar que muchos estudiantes caen en lo que denomino “síndrome del solucionario”. Es clara la existencia de gran cantidad de solucionarios de libros de texto en la web. Sin embargo, es de aclarar que estos textos son diseñados para los profesores, y no como instrumento de estudio para los alumnos. Muchos de ellos son solo una guía para el maestro y creo que, en algunos casos, no han pasado por una revisión o actualización, por lo cual pueden tener errores de procedimiento e incluso de resultado, que van a llevar al estudiante a profundizar en ellos. La solución de los ejercicios resueltos en este texto no ha tomado como base solucionarios. De hecho, no suelo consultarlos más que en ciertos casos; incluso muchos de los libros consultados ni siquiera los poseo, dado que son ediciones relativamente antiguas. Se han dado los correspondientes créditos a los autores de los libros de los cuales se han extraído los problemas que se han tomado como base, pero los desarrollos corresponden a metodologías propuestas por mí. Puede resultar que las secuencias de solución no sean las más directas en algunos casos, lo cual se debe a la necesidad de mostrar al alumno ciertas cosas que no se evidencian con otros procedimientos posiblemente más elegantes y directos. Esto es lo que diferenciaría las soluciones propuestas acá de las que pueden ser propuestas por los autores de los textos consultados.

Cabría la pregunta del estudiante: ¿cuántos ejercicios se deben realizar para garantizar la asimilación rápida de una temática? Creo que una temática no se asimila por la mucha o poca cantidad de ejercicios que se desarrollen. Me gustaría responder con una frase que puede sonar de cajón: solamente cuando uno se da cuenta de que los problemas de un libro son los mismos pero con diferentes datos y se visualiza una estrategia de solución clara simplemente con leerlo, se ha asimilado un tema. El ejercicio que uno lea y que no le quede claro inmediatamente cómo se soluciona, ese es el ejercicio que se debe realizar.

Quisiera aclarar varias cosas respecto al propósito y contenido de este libro:

- Existe un componente teórico que se ha construido con base en diferentes libros de texto que, con el pasar de los años, se han vuelto icónicos, pues varias generaciones de ingenieros nos hemos formado con ellos; y el presente texto no busca de ninguna manera reemplazarlos. Autores como White, Çengel, Potter, Fox, MacDonald y Crowe no son desconocidos para ingenieros con formación sólida. Es más, se exhorta al estudiante a leerlos, consultarlos y assimilarlos. El contenido teórico acá expuesto es simplemente una primera

aproximación que busca centrar al estudiante en la temática que se va a tratar, pero siempre se recomienda acudir a estos autores y otros más.

- Se han obviado algunos temas que se busca abordar en futuras ediciones de este libro, como la parte de cinemática de los fluidos y el análisis dimensional. Por motivos de tiempo no se profundiza en estas temáticas durante el desarrollo del curso de Mecánica de Fluidos que normalmente se ofrece. No obstante, es mi deseo incorporar estas temáticas en cursos más avanzados que pueden ofrecerse a nivel de asignaturas electivas. En futuras ediciones se incorporarán estas temáticas, así como la utilización de *software* de manejo numérico como MatLab o Mathematica.
- Se busca también que el estudiante analice este documento desde un punto de vista crítico. Los comentarios y sugerencias son completamente bienvenidos.

Fundamentos de la mecánica de fluidos

Definición de un fluido

Aparentemente resulta obligatorio iniciar con una definición del fluido en un texto introductorio como este. Sin embargo, es de anotar que aunque los textos de mecánica de fluidos inician por esta definición, es común denominador que estará dada en términos del comportamiento de un fluido. Resulta contradictorio, entonces, definir el comportamiento de algo cuya fenomenología está por estudiarse. Por ello, esta definición se irá construyendo por parte del estudiante en la medida en que avanza en el curso. Se recomienda la revisión de las definiciones previas que dan autores reconocidos como Çengel, White, Stretter y Fox.

Iniciemos entonces con la definición de algunos comportamientos que irán ilustrando lo que se va a entender como un fluido.

Constitución microscópica de un fluido

La mecánica de fluidos guarda similitud respecto a la mecánica de sólidos, en cuanto se fundamenta en el comportamiento de una sustancia. Este comportamiento se analiza primero desde el punto de vista de su estructura atómica o molecular. A diferencia de los sólidos, que tienen arreglos atómicos y moleculares ordenados, los fluidos no presentan un orden atómico. Esto se debe a la menor fuerza de cohesión existente entre sus moléculas, respecto a la que se tiene en un sólido.

Esta situación explica el comportamiento de un primer tipo de fluido que se conoce como líquido. Por **líquido** se entenderá un fluido que toma la forma del recipiente que lo contiene y presenta una superficie libre, que puede considerarse plana cuando el fluido se encuentra en reposo para fines prácticos, siempre y cuando haya presencia de gravedad y esté abierto a la atmósfera.

Existe otro tipo de fluido que se conoce como gas. Un **gas** es un tipo de fluido que toma la forma del recipiente que lo contiene, pero este debe ser necesariamente cerrado, ya que si se abre a la atmósfera, el fluido se escapa. Por lo tanto, no presenta superficie libre como un **líquido**.

También se tiene el término **vapor**. Es claro que a nivel de comportamiento es similar al de un gas. No obstante, la diferencia radica en las propiedades termodinámicas. Un vapor es una sustancia gaseosa, cuyo estado encuentra cercano a su punto de saturación. Un gas se considera una sustancia gaseosa que está suficientemente alejada de un estado de condensación (Çengel y Cimbala, 2006, p. 4).

Concepto del fluido como medio continuo

En virtud de su comportamiento, a todas luces es claro que un fluido entraña mayor complejidad que un material sólido. Existe un movimiento relativo entre sus partículas constituyentes, lo cual derrumba el principal postulado del denominado *cuerpo rígido*, que establece que las posiciones relativas entre las partículas constituyentes se mantienen fijas. Así pues, el abordaje del estudio a partir del análisis de sus partículas, aparentemente, puede no ser muy apropiado para el estudio de un fluido.

La anterior observación, que resulta bastante evidente, es muy importante, teniendo en cuenta que la formulación de las leyes fundamentales de la mecánica que ha trabajado hasta el momento el estudiante se ha establecido suponiendo que los cuerpos mantienen una forma definida (cuerpo rígido), o simplemente que su forma no tiene un efecto importante en la descripción del movimiento (partícula). Lo anterior hace pensar que resulta necesario reformular estas leyes funda-

mentales para un fluido, lo cual es cierto y se verá más adelante en el curso.

Sin embargo, un abordaje inicial sería considerar un fluido como un conjunto de partículas, y analizar su comportamiento macroscópico, es decir, como un todo o de forma global. Desafortunadamente, este abordaje no nos plantea un escenario más sencillo, pero puede ser una alternativa a seguir. Surgen entonces tres interrogantes que responderemos a continuación

1. ¿Sería necesario describir el comportamiento de un fluido partícula a partícula?

Respuesta: Sí. En ciertas aplicaciones, más bien avanzadas, se requiere un análisis partícula a partícula del comportamiento del fluido. Lo anterior constituye el denominado enfoque diferencial de la mecánica de fluidos y está más allá del alcance de este texto. Sin embargo, en algunas deducciones, se analizará lo que ocurre en una partícula (enfoque diferencial) y por medio de integraciones se deducirá lo que ocurre en la masa total del fluido (enfoque integral).

2. ¿Qué tan pequeñas o grandes pueden ser estas partículas?

Respuesta: El fluido se puede fraccionar en partes para hacer un análisis de partículas. Sin embargo, estas partículas no pueden llegar a ser tan pequeñas como sus átomos o sus moléculas, ya que a ese orden de magnitud, su comportamiento está regido por los principios de la mecánica cuántica.

No obstante, las partículas pueden llegar a tener un tamaño en el cual las propiedades, a través del fluido, tengan continuidad. Lo anterior se fundamenta en que para la descripción de las propiedades del fluido se utilizarán funciones matemáticas que sean continuas, es decir, que no tengan saltos bruscos en sus valores y que sean, así, susceptibles de que se efectúen operaciones sobre ellas, como la integración o

la derivación. A una escala atómica, no sería posible lograr esta condición, como lo muestra la figura 1. La función matemática que describiría una propiedad como la densidad, que se define como la masa por unidad de volumen, no sería continua, sino que presentaría una serie de saltos (discontinuidades), por lo cual no sería derivable ni integrable (Crespo, 2006, pp. 3-5).

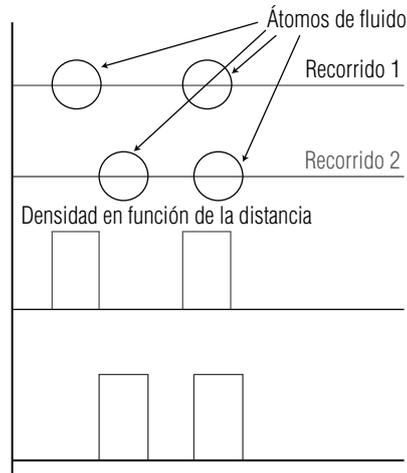


Figura 1. Densidad como función de la distancia a nivel atómico.

El condicionamiento anterior se denomina **hipótesis del medio continuo** y será fundamental para la gran mayoría de análisis y deducciones en el presente curso.

Se entiende por medio continuo un conjunto infinito de partículas (que forman parte de un sólido, de un fluido o gas) que va a ser estudiado macroscópicamente, es decir, sin considerar las posibles discontinuidades existentes a nivel microscópico (nivel atómico o molecular). En consecuencia, se admite que no hay discontinuidades entre las partículas y que la descripción matemática de este medio y de sus propiedades se puede realizar mediante funciones continuas (Oliver, 2002, p. 1).

3. ¿Se podrían tratar los fluidos con un enfoque más macro y no tan micro?

Respuesta: Claro que sí. Es el enfoque bajo el cual se van a obtener los principios y las ecuaciones fundamentales a lo largo de este curso. Esta aproximación al comportamiento del fluido entendiéndolo más como un bloque o conjunto global de partículas, se denomina enfoque integral.

Propiedades, unidades y dimensiones

Se ha hablado anteriormente del comportamiento de un fluido. Identificar y conocer el comportamiento de un fluido es uno de los objetivos esenciales de la mecánica de fluidos. Pero surge un interrogante, ¿cómo se puede identificar el comportamiento de un fluido?

Una característica de comportamiento de una sustancia se define como una **propiedad**. Así pues, el comportamiento de un fluido se identificará por medio de sus propiedades.

Las propiedades deben ser cuantificables de alguna forma, lo que se logra a través de un proceso de **medición**. La acción de medir es, simplemente, realizar una comparación de una magnitud física con respecto a un patrón o unidad de medida, lo cual entrega como resultado la cantidad de veces que el patrón está contenido en la magnitud física medida. Lo anterior entrega normalmente un valor numérico que representa la cuantificación de la propiedad y, por lo tanto, del comportamiento del fluido.

Se deduce, entonces, una estrecha relación entre la mecánica de fluidos y el proceso de medición, a través de las propiedades. Esta relación ha sido

fundamental, tanto así que, a partir de ella, se ha generado gran parte del desarrollo del campo de estudio de esta ciencia.

En mecánica de fluidos se utiliza el término **dimensión** como sinónimo de magnitud física. La definición de un problema de mecánica de fluidos como n-dimensional implica la interacción de varias magnitudes físicas. La palabra **dimensión** no implica solamente las magnitudes espaciales (largo, ancho y alto) sino que un problema de cuatro dimensiones puede involucrar, además de la longitud, otras magnitudes físicas de otros dominios (longitud, masa, tiempo y temperatura, por ejemplo).

Sistemas de unidades: breve historia

La actividad de medir es casi que inherente a la vida humana. Todos nos vemos obligados a realizar algún tipo de medición: medimos el tiempo que demoramos en llegar a nuestros trabajos o sitios de estudio, identificamos el número de pasos o cuadras que debemos transitar para llegar a un lugar. Podríamos decir que estas actividades, de una u otra forma, las realizó el hombre desde sus orígenes. Pensemos en el hombre prehistórico. Es probable que en una de sus principales actividades, como la caza, identificara que podía utilizar herramientas o armas para matar a sus presas, pero en esta confrontación era probable que él pereciera. Por lo tanto, identificó que fabricar una lanza que fuera más larga que su brazo o que él mismo, no solamente le daba ventaja sino que lo protegía del contrataque de la fiera.

Este ejemplo, algo anecdótico, sirve para identificar una de las primeras formas que tuvo el hombre para definir patrones de medición: longitudes del cuerpo humano. Se tienen como ejemplo las unidades de agrimensura utilizadas por los egipcios,

conocidas como el codo real, que correspondía a la distancia del vértice del codo a la punta de los dedos del faraón que reinara en el momento.

Se identifica que esta forma de medir cumplía con los requerimientos de la época, pero implicaba varios problemas. El primero y más evidente es que las distancias corporales no son iguales entre seres humanos; el faraón podría morir y, quien lo sucediera, no necesariamente tendría esa misma distancia en su brazo, lo cual implicaba cambios y errores en los procesos de medición.

En la medida en que la humanidad fue avanzando, se vio la necesidad de que las unidades fueran claramente definidas. La astronomía y la cartografía fueron ciencias que apoyaron esta mejor definición de los patrones de unidades, de manera que fueran claramente reproducibles.

Sin embargo, hay que anotar también que la implantación de un sistema de unidades tiene un matiz político y cultural. Los pueblos que fueron sometidos por invasiones, adoptaron cultura, idioma y, en algunos casos, formas de medir.

Y fueron hechos políticos los que crearon un primer hito en la historia de los sistemas de unidades: la creación del **sistema métrico**. En Francia, en el periodo posrevolución, existía un ambiente de cambio no solo en la estructura social sino en diferentes ámbitos de la vida humana. La salud, el derecho y las ciencias son ejemplos de áreas del conocimiento donde la premisa de cambiar las ideas fue fundamental. En este último campo, surgió la idea de implantar un nuevo sistema de medición que aboliera los sistemas existentes y contrarios a un ideal revolucionario. Se creó una comisión, presidida por el famoso matemático italofrancés Joseph-Louis Lagrange, en donde se estudiara la creación de un nuevo sistema de pesas y medidas, que es el denominado sistema métrico.

Una de las primeras premisas de este sistema fue la utilización de la base decimal para su cálculo numérico, todo ello fundamentado en el conteo con los dedos de las manos. A partir de allí se crearon comisiones para analizar nuevas definiciones de unidades. Una muy importante estuvo a cargo de los franceses Jean-Baptiste Joseph Delambre y Pierre Méchain, en la que se estableció la longitud de la cuarta parte del meridiano que pasa por la ciudad de París y se dividió en diez millones de partes; se le dio el nombre de metro (del griego μέτρον (*metron*) que significa “medida”) a la distancia correspondiente. Cuenta la leyenda que esta distancia se grabó en una piedra de granito a la entrada de la ciudad de París y aquella persona que deseara reproducirla podía tomar la distancia entre dos marcas de esta roca.

El advenimiento de la Revolución Industrial requirió unos procesos de fabricación de maquinaria que hicieron necesarios tolerancias y ajustes dimensionales más estrechos, con lo que la definición del patrón de medida a partir de rayas marcadas en una superficie resultaba antitécnico y nada práctico para el constructor de máquinas. Se tuvo la idea, entonces, de fabricar un cuerpo físico que tuviera la longitud establecida para un metro y que se preservara a unas condiciones de temperatura y humedad que mantuvieran la dimensión inalterada. Esta forma de conservar y mantener un patrón de medida perduró durante las definiciones del metro de los años 1799, 1889 y 1927.

Sin embargo, utilizar un cuerpo físico para conservar un patrón y una definición del metro entraña riesgos. Por ejemplo, este cuerpo puede ser destruido, lo que efectivamente ocurrió durante la Primera Guerra Mundial. Hacia la década de los sesenta, con base en los desarrollos previos en ingeniería nuclear y física cuántica, se definió el metro en términos de un fenómeno físico. Fue establecido que una distancia de 1 metro es la tran-

sición de 1 650 763.73 longitudes de onda de la radiación del isótopo kriptón 86.

Actualmente, el metro se define como la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 segundos.

Todo este recuento nos lleva a pensar que la definición de las unidades ha ido de la mano con el desarrollo de la humanidad. Las definiciones dadas por los primeros pueblos no son necesariamente las que utilizamos en la actualidad, y nada nos lleva a pensar que las definiciones de nuestro tiempo sean las que se utilicen en el futuro. Solo los sistemas de unidades que han cumplido con esta adaptación a las condiciones tecnológicas, han prevalecido con la consecuente mayor precisión en las medidas.

Sistema Internacional de Unidades (SI)

El Sistema Internacional de Unidades (SI) ha surgido como un intento de unificar la labor de medición a nivel mundial. Pero más allá de este intento, lo importante es que ha sido resultado de un estudio sistemático de las necesidades de medir en los campos científico y técnico.

El sistema internacional toma como base el sistema métrico decimal establecido por los franceses en la época de su revolución. Fue promulgado en 1960 durante la XI Conferencia General de Pesas y Medidas, y desde allí se conoce como Sistema Internacional de Unidades (SI).

El sistema internacional está compuesto por tres tipos de unidades: **básicas**, **suplementarias** y **derivadas**. En la tabla 1 se sintetizan las unidades básicas del sistema internacional. Son siete magnitudes, las cuales se consideran base para todos los fenómenos físicos conocidos.

Tabla 1. Unidades básicas del SI

Unidades básicas del SI		
Magnitud	Nombre	Abreviatura
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mole	Mol
Intensidad luminosa	Candela	Cd

Como **unidades derivadas** se consideran aquellas unidades que resultan de hacer una combinación de las unidades básicas, según una ley física establecida y probada. Como ejemplo se tiene el newton (N), unidad de fuerza en el SI, que se define como la fuerza que experimenta un cuerpo con una masa de 1 kg que lleva una aceleración de un metro por segundo cada segundo (m/s^2). Esta definición no es más que la aplicación de la segunda ley de Newton y de allí se puede establecer la combinación de unidades fundamentales que representa el newton:

$$\begin{aligned}
 F(N) &= \text{masa} * \text{aceleración} \\
 &= \text{kg} * \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{kg} * \text{m} * \text{s}^{-2}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

En el manejo de unidades es importante conocer las definiciones de las unidades derivadas en términos de las unidades fundamentales, con el fin de comprobar la validez de los cálculos.

Las **unidades suplementarias**, como su nombre lo indica, son el resultado de la revisión en la aplicación del sistema internacional a los cálculos científicos, donde se detectó la existencia de ciertas unidades que aun cuando se utilizan en cálculos

físicos, presentaban por definición un carácter adimensional, es decir, no se pueden expresar como combinaciones de las unidades fundamentales, ya que resultan cancelaciones algebraicas que dan como resultado la inexistencia de unidades (carácter adimensional). Para explicar mejor esto, se toma como ejemplo la unidad de medida angular conocida como el radián. De los cursos de trigonometría plana se conoce que la longitud de un arco de circunferencia (S) corresponde al producto de su radio de curvatura (r) y el ángulo que este barre θ (en radianes); es decir:

$$S = r\theta \tag{2}$$

Si se despeja θ (que está en radianes) se tiene:

$$\theta = \frac{S [L]}{r [L]} \tag{3}$$

Nótese que la unidad de medida angular radián resulta de la relación (división) entre dos longitudes (longitud de arco y radio); por lo tanto, las unidades se cancelan y le dan un carácter adimensional a la unidad de medida angular conocida como radián. Lo anterior se presenta en la tabla 2.

Tabla 2. Unidades suplementarias del Sistema Internacional

Unidades suplementarias SI		
Magnitud	Nombre	Abreviatura
Ángulo plano	Radián	Rad
Ángulo sólido	Estereorradián	Sr

Aun cuando existen unidad y abreviatura para las unidades suplementarias, no es recomendable involucrarlas; sin embargo, sí se sugiere que el estudiante principiante las use para no cometer posibles errores.

Sistema inglés de unidades

Es claro que el sistema internacional es el sistema preferido y de aplicación directa para los cálculos científicos, gracias a su aplicación y su fácil comprensión. No obstante, existe un sistema que es resultado de los diferentes sistemas de medición que se establecieron desde épocas remotas de la humanidad; el denominado sistema inglés o sistema británico de unidades.

Algo que diferencia y es característica importante del sistema inglés es la manera como se subdividen las diferentes unidades. La subdivisión no obedece a una regla general y preconcebida, como en el caso del sistema internacional, donde está establecido que la subdivisión se hace en potencias de 10. Las subdivisiones del sistema inglés son, en general, arbitrarias.

Vale aclarar que, aun cuando se promueve la implantación del sistema internacional desde hace varios años a nivel mundial, muchas especificaciones de tipo tecnológico aún se realizan en sistema inglés; el petróleo se tasa en barriles, compramos la carne por libras y la gasolina de nuestro vehículo en galones. Lo anterior hace pensar que todavía

está lejano el día en que el sistema inglés pase a buen retiro, y la mejor posición que puede tomar un ingeniero es entrenarse en el manejo de ambos sistemas.

Desde un punto de vista personal, el sistema inglés recoge también una parte cultural que es apasionante, y al estudiarla se hace un recuento de cómo los humanos fueron solucionando su problema de medir en distintas épocas de la humanidad, influenciados por actividades humanas (comercio, agricultura, industria) o por cuestiones políticas o sociales. Aun cuando se plantea en múltiples escenarios que el sistema inglés debe “desaparecer”, a mi modo de ver sería como enterrar y olvidar una parte importante de la historia de la humanidad. Actualmente, muchas de las unidades del sistema inglés no son prácticas y simplemente ya no se usan. Pero muchas también se utilizan y prevalecen en la actualidad, incluso en sus versiones métricas. Por lo anterior, en el presente libro se hará un breve recuento histórico de algunas y se presentará el sistema inglés de forma algo sistemática.

Sistema americano y sistema británico o imperial

El sistema inglés, como su nombre lo indica, tiene su origen en Gran Bretaña. Allí se recogen diferentes unidades que surgieron a partir de distintos pueblos que la habitaron o que tuvieron influencia en la región. Haciendo un pequeño análisis histórico, se encuentran unidades definidas como anglosajonas y unidades de origen romano. Estas unidades confluyeron en el sistema británico y se puede decir que se fueron perfeccionando hasta las que se tienen actualmente.

No obstante, aunque el sistema británico fue llevado a sus colonias en todo el mundo, inclusive las americanas, a partir de la separación de estas últimas se plantearon variantes que se aplicaron en

los nacientes Estados Unidos de América, y constituyen lo que se denomina el sistema americano de unidades (USCS), que, aunque se origina en el británico, tiene variaciones y es necesario tenerlas presente al momento de hacer conversiones.

Las unidades de medición del sistema inglés se agrupan normalmente en unidades de longitud, área, volumen y masa. Las unidades de fuerza y de energía son unidades derivadas (como en el caso del sistema internacional), pero han acogido términos pintorescos que son de amplia utilización en ingeniería y por ello merecen mención especial.

Unidades de longitud¹

Las unidades para medir distancias cortas se fundamentan en longitudes del cuerpo humano y se tienen a partir de allí tres unidades principales. La pulgada (abreviada pulg o “) corresponde al ancho de un dedo pulgar. El pie (abreviado pie o ‘) corresponde a la distancia de un pie humano y está definido como una distancia de 12 pulg. La yarda (abreviada yr) es la distancia desde la punta de la nariz hasta el dedo medio de un brazo humano extendido (con la mano abierta y extendida) y corresponde a una distancia de 3 pies.

En construcción de máquinas y teoría de lubricación es muy utilizada la milésima de pulgada (abreviada mil). Una pulgada corresponde a 1000 mil.

Distancias largas se miden en millas (abreviado mi), la cual está definida como mil pasos de una legión romana. Cada paso marcaba inicialmente 5 pies, por lo cual una milla inicialmente estaba definida de forma burda como una distancia de 5000 pies. Existieron inicialmente unidades de medi-

ción de distancias largas basadas en la agricultura, como el furlong, una medida de distancia basada en el arado con bueyes en la antigua Sajonia, que corresponde a 40 rod, siendo un rod una distancia de 20 “pies naturales”. Durante mucho tiempo no se requirió definir la milla de forma más precisa, dado que no era frecuente recorrer distancias de esa magnitud normalmente. Sin embargo, hacia finales del siglo XVI, fue necesario hacer esta definición de manera precisa y se acudió a la antigua definición romana, donde una milla equivalía a 8 estadios (stadia) y se consideró inicialmente que un estadio era igual a un furlong, pero esta equivalencia no fue exacta. Por lo tanto, en 1592, el Parlamento británico estableció la distancia de una milla como una longitud de 1760 yr, 5280 pies u 8 furlongs.

En la siguiente tabla se hace un resumen de estas unidades de longitud con sus correspondientes equivalencias entre ellas, y en algunos casos con el sistema métrico. Se deja como ejercicio al lector calcular las equivalencias con el sistema métrico faltante.

Tabla 3. Unidades del sistema inglés para longitud, sus abreviaturas y sus equivalencias con el SI

Unidad	Equivale a	Equivale a
Pulgada (pulg)	2.54 cm	1000 mil
Pie (ft)	12 pulg	30.48 cm
Yarda (yr)	3 ft	36 pulg
Milla	1760 yr	5280 ft

Unidades de área

Para efectos de mediciones de áreas pequeñas, las unidades de área corresponden a cuadrados de las unidades de longitud. Se tienen entonces la pulgada cuadrada (pulg²), el pie cuadrado (pie²) y la yarda cuadrada (yd²). Este es el sistema en el cual

1 Esta parte se fundamentó en el trabajo del profesor Russ Rowlett, específicamente en el *Dictionary of units of measurement* (2018).

se fundamenta la medición de áreas en el sistema americano. No obstante, para medición de grandes extensiones, se tiene establecido el acre, el cual tiene una historia particular.

El acre se definió inicialmente como la extensión de terreno que podía labrarse con una yunta de bueyes en un día de trabajo. Sin embargo, no se define como un área producto de un cuadrado geométrico, sino que corresponde a un rectángulo de 1 furlong (660 pies) de largo, por 1/10 de furlong (66 pies) de ancho, lo que implica que un acre son 43 560 pie². Diez rectángulos de estos, conformarían 1 furlong², de donde se deduce que 10 acres equivalen a 1 furlong². También se puede concluir que 1 milla² equivale a 64 furlong², es decir, 640 acres.

En la tabla 4 se resumen estas equivalencias:

Tabla 4. Unidades de área en sistema inglés y algunas de sus equivalencias con el SI

Unidad	Equivale a	Equivale a	Equivale a
pulg ²	6.4516 cm ²		
pie ² (ft ²)	144 pulg ²		
yr ²	9 pie ²	1 296 pulg ²	
milla ²	640 acres	3 097 600 yr ²	27 878 400 ft ²

Se recomienda nuevamente al lector, establecer las correspondientes equivalencias con el sistema métrico.

Unidades de masa y unidades de fuerza. Sistemas gravitacionales

Algo importante al trabajar con el sistema inglés es tener claros los conceptos de masa, peso y fuerza, los cuales se clarifican a continuación:

- Masa es la medida de la inercia de un cuerpo, entendida esta como la resistencia que opone un cuerpo a cambiar su estado de movimiento.
- Peso es la fuerza de atracción gravitatoria, ejercida por el planeta, sobre los cuerpos que existen sobre él.
- Fuerza es una interacción que se puede dar por contacto directo o por efecto a distancia, y que es capaz de cambiar el estado de movimiento de un cuerpo.

Es claro que masa y fuerza no son lo mismo, por lo tanto, las unidades de medición no pueden ser las mismas. Sin embargo, están relacionadas a través de la ecuación general de movimiento o segunda ley de Newton:

$$F = ma \quad (4)$$

Existen unos sistemas de medición denominados gravitacionales, los cuales utilizan el peso como referente o patrón para definir sus unidades de fuerza. El sistema inglés es un ejemplo de estos sistemas, con una particularidad adicional que puede complicar la interpretación: ¡las unidades de masa y de fuerza tienen el mismo nombre, aunque miden magnitudes totalmente diferentes!

Lo anterior constituye un elemento de confusión y ha sido una de las principales desventajas del sistema inglés, razón por la cual se ha perdido su abolición. No obstante, dado que ello todavía puede llevar su tiempo, lo mejor es encontrar maneras de subsanar la confusión y definir técnicas que permitan operar con el sistema de forma correcta.

Las unidades de masa y de fuerza en el sistema inglés se denominan *libras*. Hagamos en este punto un poco de historia. La libra fue una unidad de medida de peso originada en la antigua Roma y difundida a través de todo el imperio. Se establecieron dos subdivisiones para la libra. Se consideró, por un lado, que era equivalente a 12 onzas y, por otro, que era igual a 16 onzas.

Según la ley inglesa se estableció su definición con base en la cantidad de granos de cebada que contenía, ya que una de las principales necesidades de ese entonces era la medición de la cantidad de cereales para transacciones comerciales o de impuestos.

La definición inicial se estableció con base en la libra de 12 onzas, que se denominó troy, y se con-

sideró que equivalía al peso de 5760 granos de cebada. Con base en ello, una onza troy equivale a 480 granos. La libra troy siguió utilizándose por joyeros y droguistas, e incluso en la actualidad el oro se tasa en este sistema.

Sin embargo, la libra de 16 onzas fue la preferida por los comerciantes en sus transacciones comerciales. Se llamó libra *avoirdupois* y se definió como equivalente a 7000 granos. Se puede encontrar que la cantidad de granos equivalentes a una onza avoirdupois no es exacta (437.5 granos). Esto hizo que el sistema troy fuera utilizado en actividades más finas y delicadas que las transacciones comerciales, en las cuales predominó el sistema avoirdupois, que fue la base para los sistemas británico y americano.

Definición de libra-masa y libra-fuerza

Una primera manera de zanjar discusiones y diferencias de interpretación consiste en establecer claramente las libras que pueden identificar la masa y las libras que pueden identificar la fuerza en una situación particular. Para ello se utilizan comúnmente las abreviaturas lbm (libra-masa) para aquellas medidas de masa en libras, y lbf (libra-fuerza) para la medición de fuerza en libras. Es una forma útil de clarificar la situación; en el presente trabajo se empleará esta convención en la escritura. Sin embargo, algunos autores no tienen esto presente y se sobreentiende que el contexto de la situación clarifica si la medición es de fuerza o de masa. Por ello, se recomienda al estudiante que cuando lea los enunciados de los ejercicios o la teoría, haga la correcta interpretación de ellos.

No obstante, con la aclaración anterior (meramente de notación) no es suficiente, y se requiere tener muy presentes las definiciones de las unidades. A continuación, se presentan las dos definiciones que, teniéndose presentes, permiten abor-

dar el tema de la unidad de fuerza y de masa en los sistemas británico y americano.

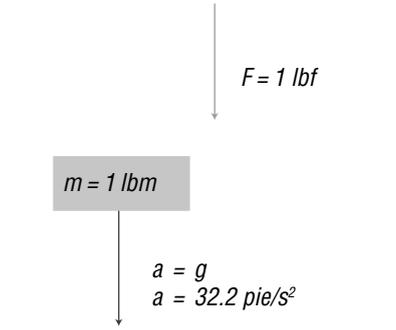


Figura 2. Definición de la libra fuerza en forma gravitacional. Fuente: Beer (1997, p. 9).

Un cuerpo con una masa de una libra-masa, en presencia de una aceleración equivalente a una gravedad terrestre, experimenta una fuerza de 1 libra-fuerza. O lo que es lo mismo, el peso de una libra-masa es una libra-fuerza.

$$1 \text{ lbf} = 1 \text{ lbm} * 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (5)$$

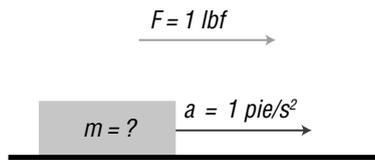


Figura 3. Definición técnica de una libra fuerza.

Una definición alternativa puede darse de la siguiente forma: un cuerpo de masa m experimenta

una aceleración de 1 ft/s^2 cuando se le aplica una fuerza de 1 lbf.

La pregunta es ¿cuánta masa tendría este cuerpo? Igualando las dos definiciones se tiene que:

$$1 \text{ lbm} * 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} = m * 1 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (6)$$

$$m = 32.2 \text{ lbm} \quad (7)$$

Esta cantidad de masa, correspondiente a 32.2 lbm, recibe el nombre de slug. Por lo tanto, una definición alternativa sería:

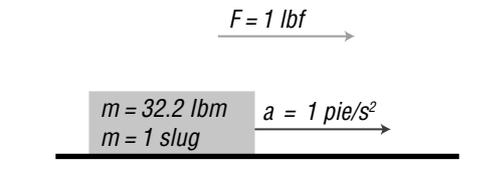


Figura 4. Definición alternativa de libra fuerza usando el slug.

$$1 \text{ lbf} = 1 \text{ slug} * 1 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} \quad (8)$$

Conversión de unidades

Convertir unidades de un sistema a otro es una práctica común, no solo en la enseñanza de la ingeniería, sino en la vida profesional como tal. Para ello, la metodología más recomendable es la utilización de factores de conversión unitarios. Esta se entiende mejor a través de un ejercicio.

Ejercicio ejemplo

El diámetro de la luna es de 3476 km. Expresa dicho diámetro en millas.

Solución

De las equivalencias presentadas anteriormente se tiene que 1 milla (mi) = 1760 yd = 5280 ft = 63 360 in = 1609.344 m = 1.609344 km.

Multiplique la cantidad por un factor unitario formado por la unidad deseada y la equivalencia conocida:

$$3476 \text{ km} * \frac{1 \text{ milla}}{1,609344 \text{ km}} = 2159,9453 \text{ millas} \quad (9)$$

La idea es multiplicar por un factor de conversión construido con la equivalencia correspondiente, de forma que las unidades se cancelen algebraicamente.

Tal vez ya se han realizado conversiones de unidades y se han utilizado métodos diferentes para hacer conversiones, basados principalmente en la utilización de una “regla de tres”. Aunque el método de factores de conversión es en cierto sentido la solución de un problema de razones y proporciones, la aplicación de la regla de tres no es del todo metódica para hacer conversiones donde se involucran varias unidades, como es el caso de las dimensiones derivadas. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejercicio ejemplo

Encuentre un factor de conversión entre la unidad de fuerza en el sistema internacional y la unidad de fuerza en el sistema inglés.

Solución

Se parte de la definición del newton como unidad derivada y se multiplica por los factores de conversión adecuados.

$$1 \text{ N} = \frac{1 \text{ kg} * \text{m}}{\text{s}^2} * \frac{2,2 \text{ lbm}}{1 \text{ kg}} * \frac{3,28 \text{ ft}}{1 \text{ m}} * \frac{1 \text{ g}}{32,2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}} = 0,224 \text{ lbf} \quad (10)$$

Es importante también tener presente en este ejercicio la definición de lbf. Recordemos que una libra-fuerza es el peso de una libra-masa, es decir, es

una libra-masa acelerada al valor de la gravedad. Por lo tanto, la aceleración debe expresarse no tanto en términos de unidades inglesas (ft/s^2), sino en términos de paquetes o fracciones de gravedad. Es por ello que se debe multiplicar por el valor estándar de gravedad en sistema inglés, que es de $32.2 \text{ ft}/\text{s}^2$.

También es importante el siguiente análisis: la unidad de fuerza en el sistema inglés es relativamente grande, el newton es apenas el 22.4% (algo más de la quinta parte) de una libra.

Del ejercicio anterior se obtiene la información acerca de cuantas lbf son 1 N. Pero ¿Cuántos N son una lbf? La relación de equivalencia se modifica ahora de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 1N &= 0,224lbf \\ \frac{1}{0,224} N &= \frac{0,224}{0,224} lbf \\ 4,46N &= 1lbf \end{aligned} \quad (11)$$

Se tiene entonces que los factores de conversión que se pueden utilizar para convertir de N a lbf o viceversa son:

$$\frac{0,224lbf}{1N} \quad (12)$$

o

$$\frac{1lbf}{4,46N} \quad (13)$$

Se deja como ejercicio construir los factores de conversión para pasar de unidades de fuerza en el sistema inglés al sistema internacional.

Ejercicios propuestos

1. En el sistema internacional se definen unidades gravitacionales que son de amplia utilidad en el campo de la ingeniería. Se tiene el kilogramo-fuerza (kg-f), que corresponde al peso de una masa de un kilogramo, y el gramo-fuerza (gr-f), que corresponde al peso de una masa de un gramo. Encuentre los factores de conversión correspondientes entre estas y las

diferentes unidades de medición de fuerza conocidas tanto en sistema internacional como en sistema inglés. ¿Qué ventaja inicial representa utilizar estas unidades de fuerza?

2. La presión se define como la relación entre fuerza y el área sobre la cual se encuentra aplicada. En el sistema internacional, se tiene como unidad de presión el Pascal (Pa), que corresponde a una fuerza de 1N aplicada sobre un área de 1m^2 . En el sistema inglés se tienen los psi (*pounds per square inch*), que corresponden a una fuerza de 1 lbf aplicada en un área de 1 pulg^2 . Encuentre el factor de conversión entre ellas. ¿Cuál de las dos unidades es mayor o menor? ¿Existen otras unidades de presión? Encuentre los correspondientes factores de conversión entre ellas y las definidas en la primera parte de este enunciado.
3. El trabajo se define como el producto entre una fuerza y la distancia que esta se desplaza de forma paralela a su línea de acción. El teorema de trabajo y energía establece la equivalencia entre el trabajo y la energía. En el sistema internacional, se tiene como unidad de medida de trabajo y energía el julio (J), que corresponde a una fuerza de 1N desplazada una distancia de 1m. Las unidades de energía en el sistema inglés se definen en términos dinámicos o en términos térmicos. En forma dinámica, el trabajo mecánico es el producto de una fuerza de 1 lb desplazada una distancia de un pie (ft). En forma térmica, se tiene el BTU que corresponde a la energía necesaria para elevar 1°F una masa de agua de 1 lb. Encuentre los factores de conversión correspondientes entre cada una de estas unidades.
4. La potencia se define como la capacidad de un sistema de entregar trabajo o energía por unidad de tiempo. En el sistema internacional se define el vatio (W) como una entrega de energía de 1 J cada segundo. Como unidad de potencia en el sistema inglés, se define el *horse power* o caballo de potencia, que corresponde a un trabajo de 550 ft-lbf por cada segundo. Una unidad de medida de potencia térmica en el sistema inglés es el BTU/h, que corresponde a una entrega de energía de 1 BTU por cada hora de consumo. Encuentre los correspondientes factores de conversión entre estas unidades.
5. El torque, momento o par de una fuerza se define como la tendencia al giro que esta le imprime a un cuerpo, cuando se encuentra aplicada sobre él. Numéricamente, corresponde al producto de la fuerza por la distancia perpendicular desde el punto de giro hasta la línea de acción de la fuerza. En el sistema internacional no existe nombre para la unidad de torque, se denomina simplemente N-m. En el sistema inglés tampoco existe un nombre específico para las unidades de torque y se define como lbf-ft. Encuentre sus correspondientes factores de conversión. También se tiene que el producto de la fuerza por la velocidad y el producto del torque y la velocidad angular equivalen a la potencia mecánica. Realice estos productos y demuestre esta afirmación.

Propiedades de los fluidos

Un sistema es una región de espacio claramente definida por límites (fronteras), que pueden ser físicos o imaginarios.

En este sistema normalmente existirá un fluido y el **comportamiento** de este se define por medio de sus **propiedades**. Un conjunto de propiedades define lo que se conoce como el estado de un sistema.

Algunas son cercanas a nuestros sentidos y, por ende, fáciles de definir y entender como la presión, la temperatura o la masa. Otras no son tan cercanas a nuestras percepciones y requieren modelos algo complejos para su definición, tales como la conductividad térmica, la conductividad eléctrica o el módulo de elasticidad.

Seguendo a Çengel y Cimbala (2006, p. 36), las propiedades se clasifican en:

- **Intensivas:** aquellas que son independientes de la masa de sustancia (por ejemplo, temperatura, presión, etc.).
- **Extensivas:** aquellas cuyo valor depende de la extensión del sistema (por ejemplo, masa, volumen, cantidad de movimiento).
- Las propiedades extensivas por unidad de masa se denominan **específicas** (volumen específico, energía total específica).

Densidad, volumen específico y gravedad específica

La densidad se define como la masa de sustancia por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (14)$$

Su recíproco se denomina volumen específico, es decir, el volumen que ocupa cada unidad de masa:

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

(15)



Figura 5. Representación de la densidad como propiedad en diferentes materiales.

Algunas veces la densidad de una sustancia se da en relación a la de otra sustancia conocida plenamente (a condiciones de temperatura específicas). Se denomina **gravedad específica** o **densidad relativa** a la razón o la relación entre la densidad de una sustancia y la densidad del agua a 4°C. Se designa normalmente con la sigla SG (de sus siglas en inglés) o DR (en español):

$$SG = \frac{\rho_{\text{sustancia}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}}$$

(16)

Ejercicio ejemplo

Expresé la densidad del agua en sistema inglés (lbm/ft³).

Solución

$$1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * \frac{2.2 \text{ lbm}}{1 \text{ kg}} * \left(\frac{1 \text{ m}}{3.28 \text{ ft}} \right)^3 = 62.34 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}$$

(17)

Ejercicio ejemplo

La gravedad específica del kerosene a 20°C es de 0.804. Encuentre la densidad del kerosene a las mismas condiciones en unidades del sistema inglés.

Solución

$$\begin{aligned}
 G.E &= \frac{\rho_{\text{kerosene}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = 0.804 \Rightarrow \rho_{\text{kerosene}} = 0.804 \rho_{\text{H}_2\text{O}} \\
 &= 0.804 * 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 804 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 804 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * \frac{2.2 \text{ lbm}}{1 \text{ kg}} * \left(\frac{0.3048 \text{ m}}{1 \text{ ft}} \right)^3 &= 50.09 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3}
 \end{aligned} \tag{18}$$

Ejercicio ejemplo

La gravedad específica del kerosene a 20°C es de 0.804. Encuentre la densidad del kerosene a las mismas condiciones en unidades del sistema inglés.

Solución

$$\rho_{\text{kerosene}} = 0.804 * \rho_{\text{H}_2\text{O}} * 62.34 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3} = 50.10 \frac{\text{lbm}}{\text{ft}^3} \tag{19}$$

Nótese que se obtiene el mismo resultado utilizando adecuadamente factores de conversión unitarios. También se identifica que el concepto de gravedad específica es independiente del sistema de unidades utilizado.

Ejercicio ejemplo

Calcule el volumen específico del agua en sistema internacional y conviértalo en unidades inglesas.

Solución

$$\begin{aligned}
 \nu &= \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 0.001 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \\
 0.001 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} * \frac{0.454 \text{ kg}}{1 \text{ lbm}} * \left(\frac{3.28 \text{ ft}}{\text{m}} \right)^3 &= 0.016 \frac{\text{ft}^3}{\text{lbm}}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Peso específico

El peso por unidad de volumen de un fluido se denomina peso específico. Se relaciona con la densidad a través de esta ecuación:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{w}{V} \\ \gamma &= \frac{mg}{V} = \rho g\end{aligned}\tag{21}$$

Ejercicio ejemplo

Calcule el peso específico del agua en sistema internacional y en sistema inglés.

Solución

$$\begin{aligned}\gamma &= \rho g = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \\ 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} * \frac{1\text{ lbf}}{4.44\text{ N}} * \left(\frac{1\text{ m}}{3.28\text{ ft}} \right)^3 &= 62.62 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3}\end{aligned}\tag{22}$$

Conclusión: para sistemas gravitacionales de unidades, el valor numérico del peso específico es igual al valor numérico de densidad.

Comprobación: calcule el peso específico del agua en kilogramos-fuerza por metro cúbico.

$$\begin{aligned}\gamma &= 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} * \frac{1\text{ kgf}}{9.81\text{ N}} = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} \\ \gamma &= \rho g = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3}\end{aligned}\tag{23}$$

Viscosidad

Resulta sencillo desplazarse con relativa facilidad en el aire, mas no en el agua. En un aceite sería aún más difícil. Se deduce entonces que existe una propiedad que cuantifica la resistencia interna del fluido al movimiento o la fluidez de este, y esa propiedad se denomina viscosidad.

Para entender el fenómeno planteamos el siguiente modelo matemático.

Supondremos un bloque de fluido que vamos a someter a un esfuerzo cortante (figura 6).

Para entender mejor la naturaleza del fenómeno, suponga que un fluido en movimiento se comporta como un mazo de naipes (figura 7).

Cada una de las capas de fluido tiende a desplazar a la adyacente. Además, el fluido se deforma con-

tinuamente en presencia de una fuerza; es decir, cuando cesa el efecto de esta, cesa la deformación.

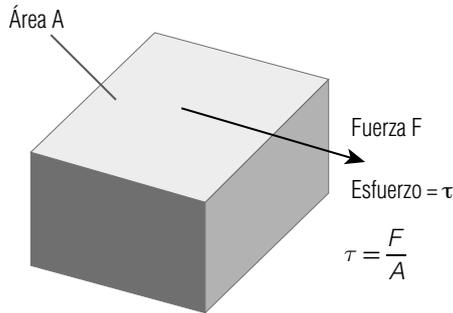


Figura 6. Bloque de fluido sometido a esfuerzo cortante.



Figura 7.

Recordemos el mazo de naipes. Obsérvese que la capa superior adquiere una velocidad (u) con un valor V . Se asume que la capa inferior está en reposo ($u=0$) y que los distintos valores de velocidad

que tienen las capas intermedias varían linealmente en función de su posición (y) con respecto al espesor (ℓ) del mazo de naipes (espesor de la capa de fluido). Lo anterior muestra la definición de lo que se denomina una **distribución o perfil de velocidad**.

$$u(y) = \frac{y}{\ell} V \quad (24)$$

Derivando con respecto a y :

$$\frac{du}{dy} = \frac{V}{\ell} \quad (25)$$

Esto se denomina **gradiente de velocidad**:

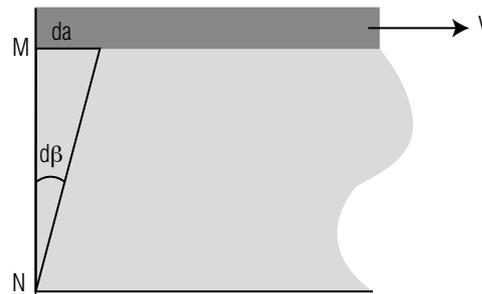


Figura 8. Movimiento de las partículas de fluido. Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 47).

Se tiene un grupo de partículas de fluido que en un tiempo inicial $t=0$, se encuentran identificadas por la recta. Dicha recta, en un instante de tiempo dt , se inclina aparentemente un ángulo $d\beta$. En la capa superior del fluido, el extremo M, se desplaza una distancia da , que sería igual a Vdt (figura 8).

La deformación angular (o por esfuerzo cortante) se define como:

$$d\beta \approx \tan\beta = \frac{da}{\ell} = \frac{Vdt}{\ell} = \frac{du}{dy} dt \quad (26)$$

¡Se tiene entonces un primer resultado, que indica que la razón de deformación es igual al gradiente de velocidad!

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{du}{dy} \quad (27)$$

La información experimental de este fenómeno permite estimar que la razón de deformación es proporcional al esfuerzo cortante:

$$\tau \propto \frac{d\beta}{dt} \quad (28)$$

Por lo tanto, la razón de deformación también es proporcional al gradiente de velocidad:

$$\tau \propto \frac{du}{dy} \quad (29)$$

Los fluidos en los que esta proporción resulta lineal se denominan *newtonianos* y corresponden a la mayoría de fluidos comunes: agua, aceite, aire, gasolina. Dicho comportamiento se muestra en la figura 9.

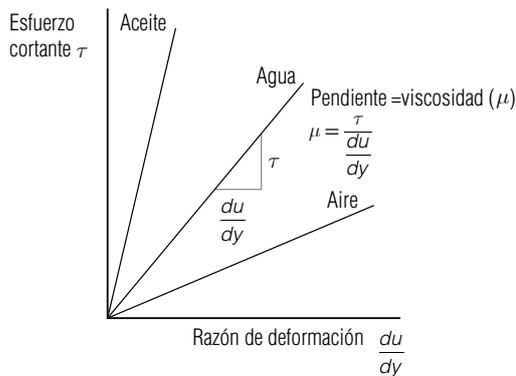


Figura 9. Relación entre fuerza cortante y razón de deformación.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 47).

Para estos casos, es fácil definir una constante de proporcionalidad. Dicha constante se denomina

viscosidad dinámica o absoluta del fluido y se designa con la letra griega “miu” (μ). Como se puede ver, esta constante corresponde al valor de pendiente de cada una de estas rectas. El valor de pendiente (viscosidad), para el caso del aire, es mayor que el valor de pendiente para el caso del agua. Por lo tanto, se deduce que el agua tiene más viscosidad que el aire. Lo hemos vivido: nos resulta más fácil movernos en el aire que en una piscina de agua. Y si esta piscina fuera de aceite, que es aún más viscoso, nos sería mucho más difícil movernos.

Obtener la constante de proporcionalidad, permite ya establecer una ecuación. A partir de ella, podemos despejar el esfuerzo cortante, siendo entonces:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (30)$$

La anterior expresión se conoce como ley de viscosidad de Newton. Otros fluidos no presentan un comportamiento lineal en cuanto al esfuerzo y la razón de deformación y se denominan *no newtonianos*.

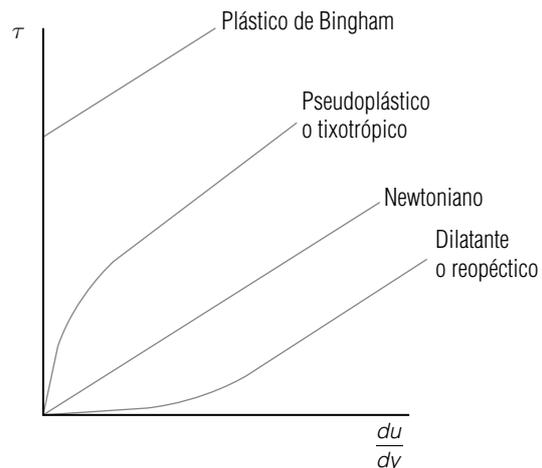


Figura 10. Comportamiento de fluidos no newtonianos.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 47).

Las unidades de la viscosidad absoluta son:

$$\mu = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right] = \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right] = [\text{Pa} \cdot \text{s}] \quad (31)$$

Existe una unidad de viscosidad dinámica muy utilizada: el *poise*. Su equivalencia en términos del SI es: $1 \text{ Poise} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$. El agua a 20°C tiene una viscosidad de 1 centipoise.

Ejercicios resueltos

Ejercicio n.º 1

Se debe mover un bloque de 50 cm x 30 cm x 20 cm que pesa 150 N a una velocidad constante de 0.8 m/s sobre una superficie inclinada con un coeficiente de fricción cinético de 0.27.

1. Determine la fuerza F necesaria a aplicar en la dirección horizontal.
2. Si se aplica una película de aceite de 0.4 mm de espesor, con una viscosidad dinámica de $0.012 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ entre el bloque y la superficie inclinada, determine el porcentaje de reducción de la fuerza necesaria².

Solución

La solución del problema (y cualquier otro de mecánica) debe iniciarse con la elaboración de un diagrama de cuerpo libre (DCL). Este se hace con base en un sistema coordenado de referencia que previamente se ha escogido (con el eje x paralelo a la superficie inclinada) y que se deja a libertad de quien solucione el ejercicio.

En la figura 11 se muestran las fuerzas que actúan sobre el bloque. Asegúrese de entender el origen y la inclinación de cada una de ellas. Ahora, a partir del anterior DCL, se plantean sumatorias de fuerzas aplicando la segunda ley de Newton. Dicha sumatoria tiene un valor nulo, dado que a lo largo del eje y no se tiene movimiento y a lo largo del eje x se tiene velocidad constante (ecuación 32).

$$\sum F_y = N - F \sin 30^\circ - W \cos 30^\circ = 0 \quad (32)$$

² Ejercicio tomado de Çengel y Cimbala (2006, cap. 2, ejercicio 2-43).

$$\sum F_x = F \cos 30^\circ - F_r - W \sin 30^\circ = ma = 0 \quad (33)$$

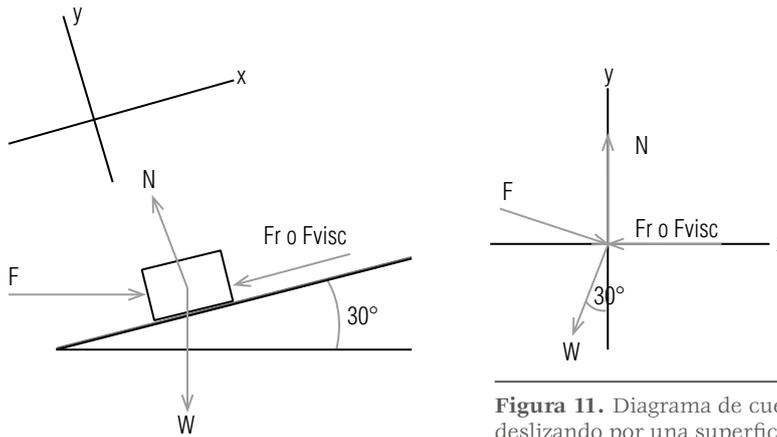


Figura 11. Diagrama de cuerpo libre de bloque deslizando por una superficie lubricada.

Una tercera ecuación (34) se establece a partir de la fricción seca:

$$F_r = \mu_k N \quad (34)$$

Reemplazando la ecuación 34 en la ecuación 33:

$$F \cos 30^\circ - \mu_k N - W \sin 30^\circ = 0 \quad (35)$$

De la ecuación 33 se puede despejar una expresión para la fuerza normal, que se puede reemplazar en la ecuación 35:

$$F \cos 30^\circ - \mu_k (F \sin 30^\circ + W \cos 30^\circ) - W \sin 30^\circ = 0 \quad (36)$$

Desarrollando la expresión se puede despejar la fuerza necesaria F :

$$\begin{aligned} F \cos 30^\circ - \mu_k F \sin 30^\circ - \mu_k W \cos 30^\circ - W \sin 30^\circ &= 0 \\ F(\cos 30^\circ - \mu_k \sin 30^\circ) - W(\mu_k \cos 30^\circ + \sin 30^\circ) &= 0 \\ F &= \frac{W(\mu_k \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)}{(\cos 30^\circ - \mu_k \sin 30^\circ)} \end{aligned} \quad (37)$$

Reemplazando valores se tiene:

$$F = \frac{150N(0.27 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)}{(\cos 30^\circ - 0.27 \sin 30^\circ)} = 150.57N \quad (38)$$

La anterior es la respuesta al inciso 1.

Para la solución de la parte 2 se tienen ligeras variaciones al DCL:

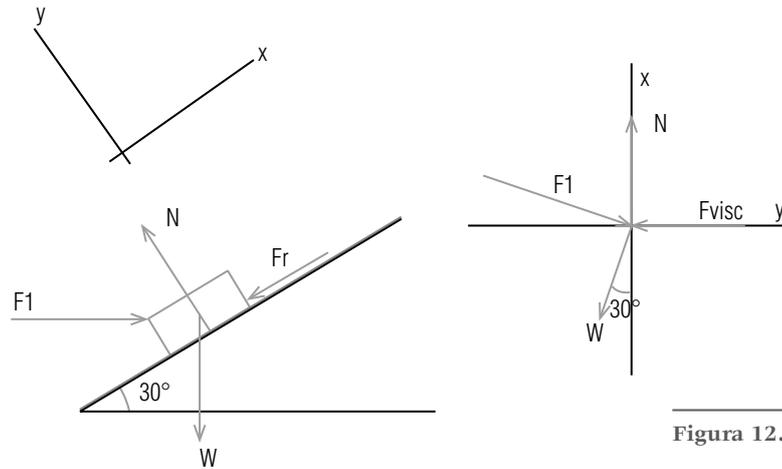


Figura 12.

$$F \cos 30^\circ - F_{visc} - W \sin 30^\circ = 0 \quad (39)$$

$$N - F \sin 30^\circ - W \cos 30^\circ = 0 \quad (40)$$

La naturaleza de la fricción viscosa viene dada por la ley de Newton de la viscosidad, expresada en la ecuación 41:

$$\tau = \frac{F_{visc}}{A} = \mu \frac{du}{dy} \quad (41)$$

$$F_{visc} = \mu A \frac{V}{l}$$

Reemplazando valores:

$$F_{visc} = 0.012 \frac{N \cdot s}{m^2} * (0.5m * 0.2m) \frac{0.8 \frac{m}{s}}{0.4 \times 10^{-3} m} = 2.4N \quad (42)$$

Reemplazando el resultado de la ecuación 42 en la ecuación 39, y despejando, se tiene:

$$F = \frac{F_{visc} + W \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{2.4N + 150 \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 89.37N \quad (43)$$

El porcentaje de reducción de la fuerza por la utilización de un lubricante es de:

$$\frac{150N - 89.37}{150N} = 0.4042 = 40.42\% \quad (44)$$

En conclusión, la adición de una película lubricante con las características indicadas reduce la fuerza necesaria para subir al bloque en un 40 %. Esta es una de las ventajas en la utilización de lubricantes.

Ejercicio n.º 2

Un cilindro de acero de 1 pulg de diámetro y 12 pulg de largo, dentro de un tubo ligeramente mayor, cae debido a su propio peso, con una velocidad uniforme de 0.5 pie/s. El espacio entre el cilindro y el tubo contiene una película de aceite de ricino con espesor l uniforme. Determine el espesor de la película si la temperatura es de 100°F^3 .

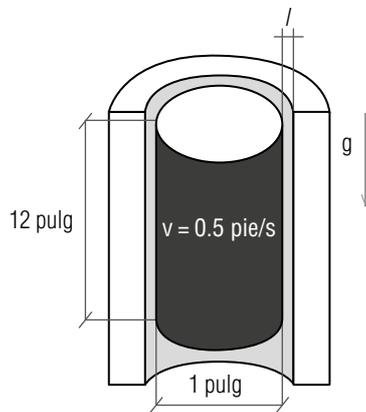


Figura 13.

Elaboremos un diagrama de cuerpo libre que muestre la realidad física del problema (figura 14):

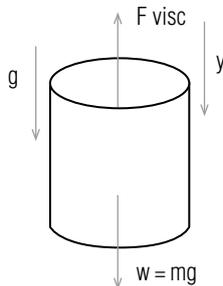


Figura 14.

Planteamos la segunda ley de Newton a partir del diagrama de cuerpo libre:

$$\sum F_y = W - F_{visc} = ma \quad (45)$$

3 Ejercicio tomado de Streeter y Wylie (1981, p. 34).

El cilindro cae con velocidad constante, por lo tanto su aceleración es nula. Así pues, se puede despejar el peso del cilindro en términos de la fuerza viscosa:

$$W = F_{\text{visc}} = \frac{\mu AV}{l} \quad (46)$$

Desde esta ecuación puede despejarse la variable incógnita, es decir, l :

$$l = \frac{\mu AV}{W} \quad (47)$$

Ahora calculemos cada una de las variables que necesitamos:

$$\mu = 6 \times 10^{-3} \frac{\text{lb} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2} \quad (48)$$

Área lateral del cilindro (verde):

$$A = \pi \cdot D \cdot L = \pi \cdot \left(\frac{1}{12} \text{ft}\right) \cdot 1 \text{ft} = \frac{\pi}{12} \text{ft}^2 \quad (49)$$

$V = 0.5 \text{ pie/s}$ (dato del problema).

Para calcular el peso del cilindro de acero, considere que el material del cilindro tiene una SG de 7.85:

$$\gamma_{\text{acero}} = \text{SG} \cdot \gamma_{\text{agua}} = 7.85 \cdot 62.34 \frac{\text{lb}_f}{\text{pie}^3} = 489.37 \frac{\text{lb}_f}{\text{pie}^3} \quad (50)$$

$$W = \gamma_{\text{acero}} \cdot V_{\text{cilindro}} = \gamma_{\text{acero}} \cdot \frac{\pi D^2 L}{4} = \gamma_{\text{acero}} \cdot \frac{\pi \left(\frac{1}{12} \text{ft}\right)^2 \cdot 1 \text{ft}}{4} \quad (51)$$

$$W = \gamma_{\text{acero}} \frac{\pi}{576} \text{ft}^3$$

Reemplacemos ahora en la ecuación que se despejó para el espesor:

$$l = \frac{\mu AV}{W} = \frac{6 \times 10^{-3} \frac{\text{lb} \cdot \text{s}}{\text{ft}^2} \cdot \frac{\pi}{12} \text{ft}^2 \cdot 0.5 \frac{\text{ft}}{\text{s}}}{489.37 \frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^3} \cdot \frac{\pi}{576} \text{ft}^3} = 2.94 \times 10^{-4} \text{ft} \quad (52)$$

$$l = 3.53 \times 10^{-3} \text{pulg} = 0.09 \text{mm}$$

Ejercicio n.º 3

Se va a medir la viscosidad de un fluido con un viscosímetro construido de dos cilindros concéntricos de 75 cm de largo. El diámetro exterior del cilindro interior es de 15 cm y la holgura entre los dos cilindros es de 0.12 cm. Se hace girar el cilindro interior a 200 rpm y se mide que el par de torsión es de $0.8 \text{ N}\cdot\text{m}^4$

Determine la viscosidad del fluido.

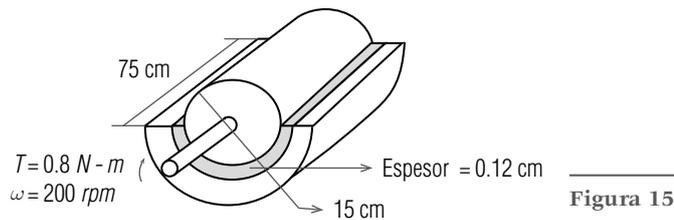


Figura 15.

Se elabora el DCL del rodillo interior del viscosímetro. El torque producido por la fuerza viscosa debe igualar al torque aplicado sobre el cilindro. Aplicando la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional se tiene:

$$\sum T = T - T_{\text{visc}} = I\alpha \quad (53)$$

El fluido se encuentra entre los dos cilindros. El movimiento del cilindro interior hace que las capas de fluido se deslicen entre sí, obteniéndose entonces un perfil de velocidad entre ellas.

De la ley de viscosidad de Newton se tiene:

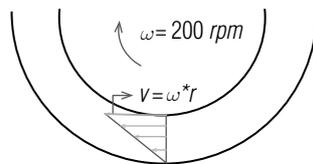


Figura 16.

$$\frac{F_{\text{visc}}}{A} = \mu \frac{du}{dy} \quad (54)$$

4 Ejercicio tomado de Çengel y Cimbala (2006, ejercicio 2-51).

El gradiente de velocidad viene dado por:

$$\frac{du}{dy} = \frac{V}{l} = \frac{\omega * D * 2\pi}{2 * 60 * l} \quad (55)$$

Donde l es la brecha entre los dos cilindros, $r = D/2$ y la velocidad angular w se debe expresar en rad/s, por lo cual debe ser multiplicada por 2π .

La fuerza viscosa viene dada por:

$$F_{visc} = \frac{T}{r} = \frac{2T}{D} \quad (56)$$

Reemplazando la ecuación 56 en la ley de viscosidad de Newton (ecuación 54):

$$\frac{2T}{DA} = \mu \frac{du}{dy} \quad (57)$$

Pero $A = \pi DL$, donde L es la longitud del cilindro.

Reemplazando el resultado anterior y la ecuación 55, se tiene:

$$\frac{2T}{D^2 \pi L} = \mu \frac{\omega * D * 2\pi}{2 * 60 * l} \quad (58)$$

Despejando la viscosidad μ , se llega a:

$$\mu = \frac{120lT}{D^3 \pi^2 \omega L} \quad (59)$$

Reemplazando los valores en la ecuación 59 se tiene:

$$\mu = \frac{120 * 0.12 * 10^{-2} * 0.8 Nm}{(15 * 10^{-2} m)^3 * \pi^2 * \frac{200}{s} * 75 * 10^{-2} m} \quad (60)$$

$$\mu = 2.3 \frac{Ns}{m^2}$$

Tensión superficial

Los fluidos presentan comportamientos bien particulares que son manifestaciones de su naturaleza microscópica. Como ejemplo se tiene el caso de los

insectos que tienen la capacidad de caminar sobre el agua (figura 17). También se observa que un flui-

do puede tener la capacidad de cubrir una superficie (mojar) o cubrirla parcialmente (figura 18).



Figura 17. Algunos insectos pueden caminar sobre el agua.

Fuente: <http://bit.ly/2K5ym1s>



Figura 18. Un fluido puede cubrir (mojar parcial o totalmente) una superficie.

Algo interesante es que los anteriores fenómenos también están relacionados con la formación de gotas o de burbujas (figura 19), las cuales son características en los fluidos.

Todos estos comportamientos son manifestaciones de la denominada **tensión superficial de un fluido**.



Figura 19. La formación de burbujas también es una consecuencia de la tensión superficial.

Para entender un poco mejor la naturaleza de esta tensión superficial, estudiemos lo que ocurre con un globo de fiesta (figura 20).



Figura 20. Manifestación física de la tensión en una membrana. De esta misma forma actúa la tensión superficial sobre una membrana de fluido.

Nótese que cuando el globo se infla, su material, que se asemeja a una membrana, se *estira*, razón por la cual se considera que está sometido a **tensión**.

Analizando un poco el material de la bomba, manipulemos probetas de distintos anchos (figura 21). Obsérvese que a medida que el material tiene más longitud de ancho, se requiere aplicar más fuerza para estirarlo. De lo anterior se deduce que la **fuerza de la membrana de caucho es función de la longitud**.

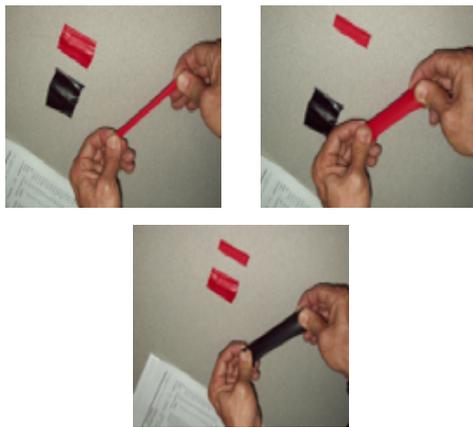


Figura 21. La tensión que se debe aplicar a muestras de distinto tamaño, pero de material análogo, depende del ancho de la muestra.

Las gotas de líquido se comportan como pequeños globos esféricos llenos con líquido. La superficie de estas gotas actúa como una membrana elástica estirada sometida a tensión de forma análoga, como el globo de la figura 20.

La tensión superficial tiene su origen en las fuerzas de cohesión existente entre las moléculas que conforman el fluido (figura 22). Las **moléculas de la superficie** experimentan fuerzas por parte de las **moléculas interiores** y de las vecinas en la superficie. La fuerza que ocurre en la superficie es una fuerza de tensión y se denomina *tensión superficial*.

cial. Las **moléculas interiores** experimentan fuerzas atractivas en todas direcciones por parte de sus vecinas, lo cual las hace estar en “**equilibrio**”.

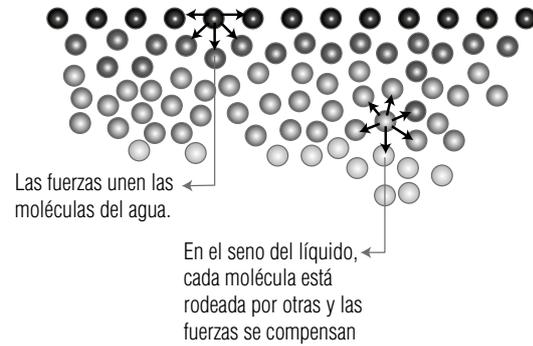


Figura 22. Las fuerzas atómicas entre las moléculas de fluido, en su interior y en la superficie.

Es lógico pensar que, entre más ancha sea la superficie, mayor será el número de moléculas ejerciendo fuerzas de cohesión. Es por ello que la tensión superficial depende de la longitud de la superficie. Sus unidades son:

$$\sigma_s = \left[\frac{N}{m} \right] = \left[\frac{lbf}{ft} \right] \quad (61)$$

Esta ecuación, expresada en términos de unidades, puede reformularse multiplicando por metros en el numerador y en el denominador de la siguiente forma:

$$\sigma_s = \left[\frac{N \cdot m}{m \cdot m} \right] = \left[\frac{N \cdot m}{m^2} \right] = \left[\frac{J}{m^2} \right] \quad (62)$$

A partir de lo anterior, puede plantearse una definición alterna de tensión superficial como el **trabajo realizado por unidad de incremento de área superficial del líquido**.

Tiene sentido hablar de la tensión superficial solo en las interfaces líquido-líquido o líquido-gas. Por

ello, cuando se especifica la tensión superficial, es importante establecer el líquido o gas adyacente.

Tabla 5. Tensión superficial en N/m de algunos fluidos en presencia de aire a 20 °C y 1 atm

Fluido	Tensión superficial
Agua a 0 °C	0.076
Agua a 20 °C	0.073
Agua a 100 °C	0.059
Agua a 300 °C	0.014
Glicerina	0.063
Aceite SAE 30	0.035
Mercurio	0.440
Alcohol etílico	0.023
Sangre a 37 °C	0.058
Gasolina	0.022
Amoniaco	0.021
Solución de jabón	0.025
Kerosene	0.025

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 52).

Capilaridad

La capilaridad es el ascenso o descenso de un líquido en un tubo de un diámetro pequeño que se inserta en él. Estos tubos angostos se denominan capilares.

Otra manifestación de la capilaridad, posiblemente más cotidiana, es la formación de la superficie curva que forma un líquido cuando moja la superficie del recipiente que lo contiene. Dicha superficie curva se denomina **menisco**. Asociado al menisco, se define el denominado ángulo de

mojadura o de contacto (figura 23). En el caso en que el fluido moja efectivamente la superficie del recipiente, se tienen ángulos de contacto agudos; lo contrario implica ángulos obtusos.

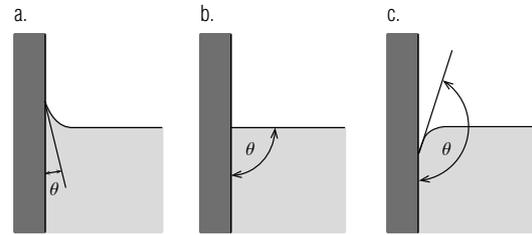


Figura 23. Formación de meniscos y los denominados ángulos de mojadura.

El ascenso del líquido por el capilar se debe a la tensión superficial del líquido que está dentro del capilar. La tensión superficial ocasiona un efecto de “halado” del líquido en el interior del tubo capilar, y por ello el líquido va ascendiendo dentro de él. Es importante tener en cuenta que la tensión superficial no actúa verticalmente, sino que viene afectada por el ángulo de contacto. Por lo tanto, es solamente una componente de la tensión superficial la que hala la columna de líquido (figura 24).

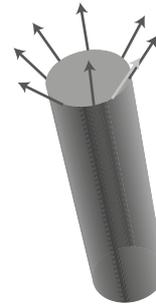


Figura 24. Columna de líquido halada por la tensión superficial.

Haciendo un equilibrio de fuerzas entre el peso del líquido ascendido y la componente de la tensión superficial se tiene:

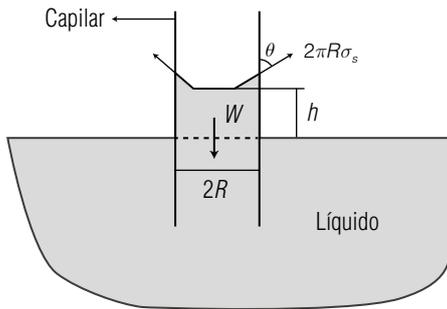


Figura 25. Líquido elevándose a través de un capilar.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 54).

$$W = \rho g(\pi R^2 h) = 2\pi R\sigma_s \cos\theta \quad (63)$$

Donde R es el radio del tubo capilar, σ la densidad del fluido, θ el ángulo de contacto y h la altura a la cual asciende el líquido dentro del tubo capilar, medida desde la superficie libre del fluido.

Despejando h de la ecuación anterior se obtiene la siguiente fórmula:

$$h = \frac{2\sigma_s}{\rho g R} \cos\theta \quad (64)$$

Tensión superficial: gotas y burbujas

Un problema interesante es determinar el diámetro máximo que puede tener una gota de un fluido. Supóngase que la gota tiene una presión interna, que simplemente corresponde a la diferencia de presión entre su interior y su exterior (figura 26):

$$2(2\pi R)\sigma_s = (\pi R^2)\Delta P_{\text{gota}} = P_i - P_o = \frac{4\sigma_s}{R} = \frac{8\sigma_s}{D} \quad (65)$$

La fuerza que se ejerce como resultado de esta presión es equilibrada por la tensión superficial que ejerce el fluido.

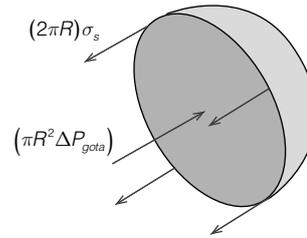


Figura 26. Análisis de equilibrio para una gota de líquido.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 53).

Esta fórmula da el diámetro máximo que puede tener la gota:

$$D = \frac{4\sigma_s}{\Delta P_{\text{gota}}} \quad (66)$$

Para el caso de una burbuja, hay que tener en cuenta que la tensión superficial se desarrolla a lo largo de una película de espesor finito. Por lo tanto, la ecuación ahora es:

$$(2\pi)s_s = (\pi R^2)DP_{\text{gota}} = P_i - P_o = \frac{2s_s}{R} = \frac{4s_s}{D} \quad (67)$$

Siendo ahora el diámetro de la burbuja:

$$D = \frac{8\sigma_s}{\Delta P_{\text{gota}}} \quad (68)$$

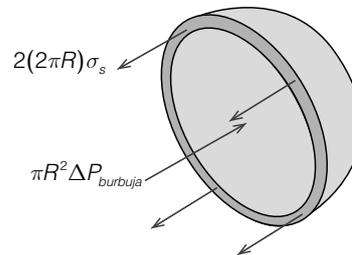


Figura 27. Análisis de equilibrio para una burbuja.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 53)

Estática de fluidos (hidrostática)

En esta parte se estudian las fuerzas que ejercen los fluidos en reposo. La propiedad de los fluidos responsable de estas fuerzas es la presión, que es la fuerza normal que ejerce el fluido por unidad de área.

La presión (P) se define como la fuerza ejercida por o sobre un fluido por unidad de área. Se habla de la presión solo cuando se trata de líquidos o gases. La contraparte de la presión, en el caso de los sólidos, es el esfuerzo normal.

$$P = \frac{F}{A} \quad (69)$$

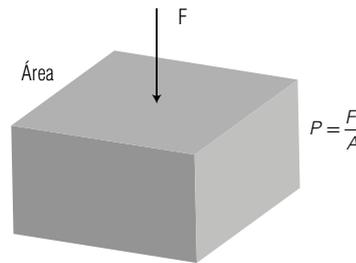


Figura 28.

A partir de la definición de presión, su unidad de medida en el sistema internacional es el newton por metro cuadrado, que se denomina Pascal:

$$[Pa] = \left[\frac{N}{m^2} \right] \quad (70)$$

En el sistema inglés, la unidad de presión sería la libra-fuerza por pulgada cuadrada, que se denomina psi (*pounds per square inch*).

$$psi = \frac{lbf}{pulg^2} \quad (71)$$

Se tienen otras unidades para medición de la presión, como son los bar, las atmósferas (atm) y los kilogramos-fuerza por centímetro cuadrado. A continuación se listan algunas de estas equivalencias. Se recomienda como ejercicio encontrar todos los posibles factores de conversión entre ellas.

$$\begin{aligned} 1bar &= 10^5 Pa = 0.1MPa = 100kPa \\ 1atm &= 101325 Pa = 101.325kPa \\ &= 1.01325bar \\ 1 \frac{kgf}{cm^2} &= 9.807 \frac{N}{cm^2} = 9.807 \times 10^4 Pa \\ &= 0.9807bar \\ &= 0.9679atm \end{aligned} \quad (72)$$

Presión absoluta, de vacío y manométrica

La atmósfera de nuestro planeta es una gran masa gaseosa. En virtud de su propio peso, genera una fuerza en su interior sobre cada unidad de área de superficie en la Tierra. Esto genera lo que se denomina **presión atmosférica**.

Al encontrarnos dentro de la atmósfera, cualquier presión que se mida con algún instrumento adecuado para ello será relativa a la presión atmosférica que se experimenta en el sitio donde se realice la medida.

Los aparatos con los que se mide la presión se denominan **manómetros** y las presiones medidas con ellos se denominan **manométricas**. El tipo de manómetro de más amplia utilización es el denominado manómetro de Bourdon. En la figura 29 se muestra un esquema interno del mecanismo típico de este manómetro.

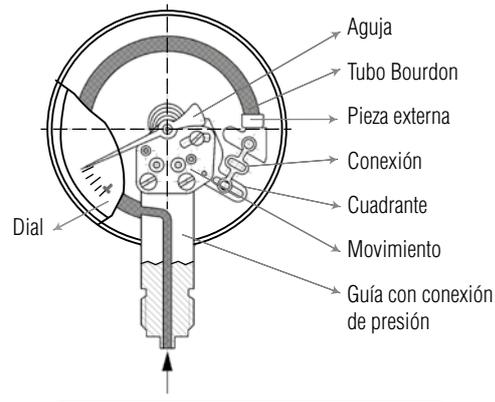


Figura 29. Mecanismo interno de un manómetro de Bourdon.

Fuente: Wikipedia. Licencia WikiCommons (bit.ly/35W6hnR).

Las presiones manométricas pueden ser mayores que la presión atmosférica; en este caso, se consideran positivas (+). También pueden ser menores que la presión atmosférica, las cuales se consideran negativas (-) y se conocen normalmente como **presiones de vacío**.

Las presiones referidas a una presión de referencia que consideraremos nula (cero absoluto de presión) se denominan presiones absolutas.

Estas consideraciones se representan en la figura 30. En virtud de todo ello, se pueden establecer las siguientes relaciones entre los diversos tipos de presión:

$$\begin{aligned} P_{abs} &= P_{atm} + P_{man} \\ P_{man} &= P_{abs} - P_{atm} \\ P_{vacío} &= P_{abs} - P_{atm} \end{aligned} \quad (73)$$

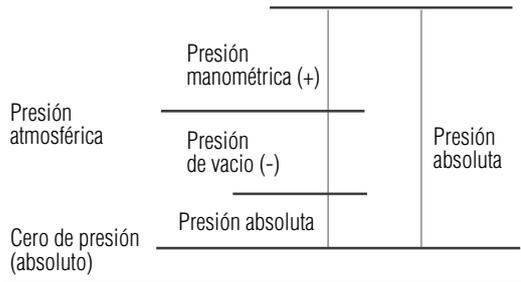


Figura 30. Relaciones entre la presión atmosférica, manométrica, de vacío y absolutas. Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 67).

Presión en un punto

Analicemos el fenómeno de la presión en el interior de un fluido. Supongamos una masa de fluido con forma de cuña que se encuentra en el interior de este y se considera en equilibrio. Por lo tanto, se puede aplicar una sumatoria de fuerzas a lo largo de los ejes x y z que sea igual a cero. Adicionalmente, se considerará que el análisis se realizará de forma unitaria, es decir, considerando que el ancho de la cuña (definido por Δy) es igual a uno (1). Lo anterior simplifica mucho el cálculo de las fuerzas sobre las caras de la cuña. La presión multiplicada por el área de la cara correspondiente sería la fuerza sobre esa cara. Pero, dado que $\Delta y = 1$, los valores de las áreas corresponderán al valor de la coordenada correspondiente $\Delta x = \Delta y$ (figura 31).

Las ecuaciones de equilibrio son las siguientes:

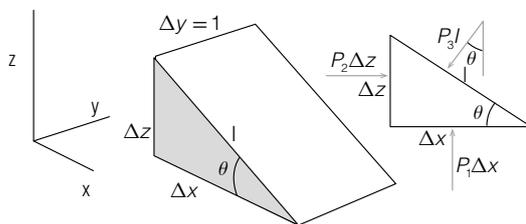


Figura 31. Cuña de fluido para determinar la presión en un punto.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 69).

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ P_1 \Delta z - P_3 l \sin \theta &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ P_2 \Delta x - P_3 l \cos \theta - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (74)$$

En la figura 31 se pueden determinar las siguientes relaciones: $\Delta x = l \cos \theta$ y $\Delta z = l \sin \theta$.

Reemplazando estas ecuaciones en la ecuación 74:

$$\begin{aligned} P_1 - P_3 &= 0 \\ P_3 l \cos \theta - P_3 l \cos \theta - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Ahora se hará uso del concepto de límite. Como se busca obtener la presión en un punto, se considera que las dimensiones de la cuña se hacen muy pequeñas (Δz tiende a cero). Por lo tanto, se llega finalmente a:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_3 \\ P_2 - P_3 &= 0 \\ P_2 &= P_3 \\ P_2 &= P_1 \end{aligned} \quad (76)$$

¡La presión en un punto en el interior de un fluido tiene la misma magnitud en todas direcciones!

Esta presión se considera desarrollada en el interior de un fluido en reposo y por ello recibe el nombre de **presión hidrostática**.

Variación de la presión con la profundidad

La experiencia nos dice que, al incrementar la profundidad en el interior de un fluido, la presión que se experimenta aumenta. Cuando se nada sumergido en el fondo de una piscina, se experimenta

un incremento de presión en los oídos. Se puede pensar que esta presión corresponde al peso de columna de fluido que existe encima del lugar donde se esté sumergido. Entre mayor sea la profundidad de sumersión, mayor es el peso de columna de fluido y, en consecuencia, mayor es la presión.

Sin embargo, aunque es clara la naturaleza de esta variación de la presión hidrostática con respecto a la profundidad de sumersión, la pregunta adicional sería: ¿en qué forma se realiza esta variación (lineal, cuadrática o cúbica)?

Para ello se cambia el modelo anterior por un bloque de fluido, también de ancho unitario, interior a un fluido, y se plantea una condición de equilibrio en la coordenada z . No interesa plantear un equilibrio en la dirección x , ya que no se conoce el valor de las fuerzas en esa dirección (no se conoce la variación de la presión, de hecho, es lo que se pretende deducir). Pero, por principio de cuentas, se considera que el bloque permanece en el interior del fluido en equilibrio; por lo tanto, no experimenta una fuerza resultante en la dirección x .

A lo largo de la coordenada z se tiene, entonces, la siguiente sumatoria de fuerzas que debe ser nula:

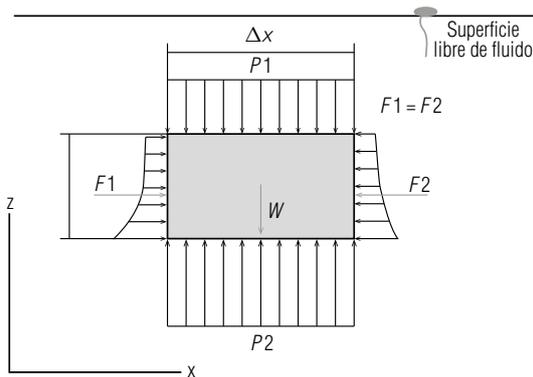


Figura 32. Modelo para variación de la presión.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 69).

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ P_2 \Delta x - P_1 \Delta x - \rho g \Delta x \Delta z &= 0 \\ P_2 - P_1 &= \rho g \Delta z = \gamma \Delta z \end{aligned} \quad (77)$$

La diferencia de presión hidrostática entre dos puntos de un fluido de densidad constante es proporcional a la distancia vertical entre esos dos puntos y a la densidad del fluido.

De esta sencilla expresión también se puede observar que la variación de la presión hidrostática es lineal con respecto a la profundidad⁵ (figura 34).

Algunos autores más rigurosos escriben esta ecuación de la siguiente forma:

$$\Delta P = -\rho g \Delta z = -\gamma \Delta z \quad (78)$$

Aquí se tiene presente que la presión aumenta con respecto a la profundidad de sumersión. Sin embargo, dada la definición del sistema coordenado propuesto xz (obsérvese la definición del origen del sistema en la figura 32), la coordenada z disminuye en términos de un aumento de la profundidad. Un aumento de presión implica un decremento en la coordenada z , y por ello el signo menos que acompaña a $-\gamma \Delta z$

Expresemos esta ecuación en forma diferencial:

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\gamma \quad (79)$$

La anterior ecuación se conoce como **ecuación fundamental de la hidrostática o ecuación de Euler**. Se le atribuye al matemático y físico suizo Leonhard Euler (1707-1783).

⁵ Esto se deduce del hecho de que el exponente de la coordenada z es 1.



Figura 33. Leonhard Euler (1707-1783).
Fuente: Wikipedia. Licencia WikiCommons
(bit.ly/2YnSwcw)

La utilización de este signo menos puede obviarse si se realiza un pequeño cambio en la definición de la coordenada de profundidad. Se define la coordenada h como la distancia que existe desde la superficie libre del fluido y el punto interior de este, en el cual se determina la presión. Nótese que esta coordenada h aumenta conforme aumenta la profundidad en el interior del fluido (figura 32) y es positiva en esta dirección.

Utilizando esta nueva coordenada h , la ecuación de Euler puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dh} = \gamma \quad (80)$$

Supóngase que interesa encontrar el valor de presión hidrostática en un punto 2, interior a un fluido, y que se encuentra a una profundidad h de un punto 1, y este último punto está en la superficie libre del fluido que se encuentra a presión atmosférica (figura 34). Aplicando la ecuación de Euler, se tiene que el valor de la presión hidrostática en el punto 2 es:

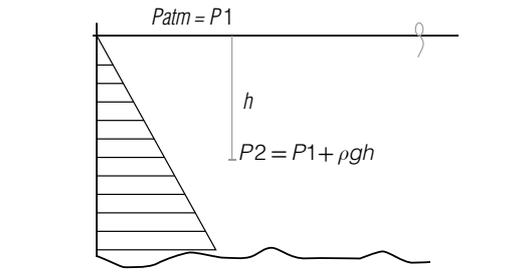


Figura 34. Variación lineal de presión hidrostática con la profundidad. Utilización de una columna de líquido para definir una presión manométrica (cabeza de presión).

Fuente: Çengel y Cimbala (2006, p. 69).

$$P_2 = P_{atm} + \rho gh \quad (81)$$

Recordando la definición de presión absoluta:

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{man} \quad (82)$$

Comparando las dos ecuaciones anteriores, se puede comprobar que la presión hidrostática en el punto 2 (P_2) es una presión absoluta, y que el componente de presión manométrica viene dado por el término ρgh :

$$P_{man} = \rho gh \quad (83)$$

Lo anterior indica que una columna de líquido de altura conocida podría utilizarse como instrumento para medir una presión manométrica. Más aún, la longitud de dicha columna de líquido correspondiente a un valor de presión manométrica se utiliza como unidad de presión en sí misma. Es común expresar presiones en unidades como pulgadas de mercurio (inHg), milímetros de columna de agua (mmH₂O o mm.c.a), pulgadas de agua (inH₂O) o milímetros de mercurio (mmHg). Cuando se expresan presiones en esta forma, se dice que se está expresando la presión como una *cabeza o carga de presión*. La cabeza de presión corresponderá a la altura de la columna de líquido, es decir, la coordenada h de la presión hidrostática

equivalente a la presión de la cual se desea reportar la medida.

Otra consecuencia adicional de la aplicación de la ecuación de Euler se puede expresar en el siguiente postulado: puntos interiores de un mismo fluido, que se encuentren al mismo nivel (profundidad), tienen la misma presión hidrostática.

A partir de lo anteriormente dicho y refiriéndose a la figura 35, los puntos A, B y C experimentan la misma presión hidrostática. Los puntos D y E experimentan una presión mayor, pero D y E no tienen la misma presión hidrostática, pues no se encuentran en el mismo fluido.

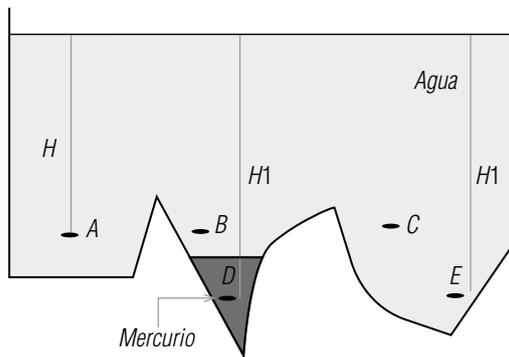


Figura 35. Puntos de un mismo fluido al mismo nivel tienen igual presión hidrostática.

Principio de Pascal

Como consecuencia de la ecuación fundamental de la hidrostática, los fluidos son medios muy utilizados para transmitir la presión. Cuando se aplica presión a un fluido confinado, este aumento de presión en el interior se transmite a lo largo de todo el fluido, en la misma cantidad y en todas direcciones. Esta característica, conocida como principio de Pascal, es el fundamento de máquinas útiles y poderosas, como las denominadas prensas hidráulicas, y, en una versión más pequeña, los gatos hidráulicos que se utilizan para levantar un vehículo o cualquier carga pesada.

Como consecuencia de la ecuación de Euler, la presión entre el punto 1 y el punto 2 de la prensa hidráulica mostrada en la figura 36 debe mantenerse constante. Se tiene entonces:

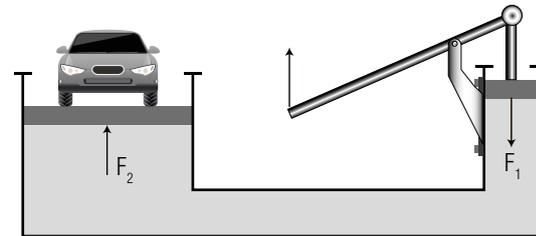


Figura 36.

Tal vez es más dicente esta fórmula si se reexpresa de la siguiente forma:

$$P_1 = P_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2} \quad (84)$$

Ahora supóngase que el área del cilindro 1 es la mitad del área del cilindro número 2; por lo tanto, se tiene:

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} \quad (85)$$

$$F_1 = 0.5F_2 \quad (86)$$

Es decir, la fuerza que se debe aplicar al cilindro número 1 es la mitad de la necesaria para levantar el coche en el cilindro número 2.

Dada la geometría cilíndrica presente, esta relación se puede dar en términos de los diámetros de los cilindros, así (se invita al lector a comprobarlo):

$$F_1 = F_2 \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \quad (87)$$

Piezometría

Como se indicó anteriormente, una columna de fluido puede utilizarse para medir presiones. El instrumento para medir presiones que se fundamenta en este principio se denomina *piezómetro*⁶.

Un piezómetro es simplemente un tubo flexible o curvado, dentro del cual se deposita un líquido de propiedades conocidas, particularmente su densidad. Debe tenerse cuidado al llenar el piezómetro, para que no queden burbujas de aire atrapadas en él, ya que puede alterarse la lectura.

A continuación, una entrada del tubo se conecta al recinto donde se quiere conocer la presión, y la otra entrada puede dejarse a la atmósfera o conectarse a otro depósito a presión. Como efecto de ello, el nivel de fluido en el interior del piezómetro cambia. Esta diferencia de nivel entre la entrada y la salida puede utilizarse para determinar la presión en el recipiente analizado.

Se ilustrará cómo se realiza el análisis de un piezómetro de forma general, a través de un ejercicio tomado del libro de Çengel y Cimbala, en el cual se desea conocer la presión en un ducto de aire acondicionado que transporta aire.

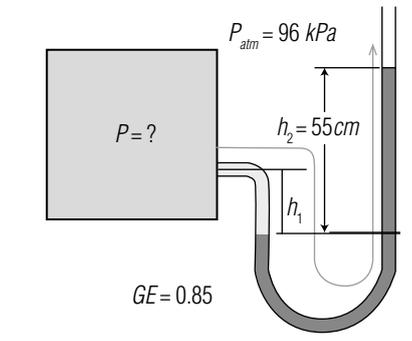


Figura 37. Montaje para un piezómetro.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 71).

La metodología propuesta consiste en plantear una ecuación de balance hidrostático, sintetizada en los siguientes pasos:

- Se hará un recorrido del piezómetro planteando una ecuación que se denominará *ecuación de balance hidrostático*. El primer término de esta ecuación será el valor de presión en el cual se inicie el recorrido en el manómetro y puede ser conocida, o la incógnita del problema.
- Se continuarán agregando términos a continuación de la forma ρgh o γh que serán positivos si la dirección del recorrido es hacia abajo, y negativos si la dirección es hacia arriba.
- Se continuará escribiendo la ecuación hasta llegar al final del manómetro. Allí se escribirán el signo igual y el valor de presión que se tenga. En el caso de un manómetro cuyo final esté abierto a la atmósfera, se tienen las siguientes posibilidades: si se toma el valor de la presión atmosférica del lugar, la presión incógnita será una presión absoluta. Si se toma el valor de presión atmosférica en términos manométricos

6 En algunos textos se denomina *manómetro*. No obstante, en aras de la claridad, para efectos de este texto, este equipo se denominará *piezómetro*. El término *manómetro* se dejará para aquellos instrumentos que se emplean para medir presiones que utilizan otro principio, como el caso del manómetro de Bourdon explicado anteriormente. En consecuencia, la temática desarrollada en torno al manejo de los piezómetros, se denominará *piezometría*.

cos (que es cero) la presión incógnita será manométrica. Si el manómetro no está abierto a la atmósfera, el término a escribir corresponde a la presión en ese punto del manómetro.

Siguiendo estrictamente el procedimiento descrito, la ecuación de balance hidrostático sería:

$$P + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_3 - \gamma_2 h_3 - \gamma_2 h_2 = P_{atm} \quad (88)$$

Surge la siguiente pregunta: la distancia h_1 no es conocida; ¿cómo puede resolverse esta ecuación para la presión del depósito P ? En el caso del problema en particular, esta distancia corresponde a un incremento de presión muy leve, dado que el fluido es aire, que tiene una densidad muy inferior a la de un líquido; por lo tanto, este término puede despreciarse en la ecuación.

También se observa en la ecuación que dos términos hidrostáticos asociados a la distancia h_3 se cancelan algebraicamente. Esto es una consecuencia del principio explicado anteriormente, que expresa que puntos en el mismo fluido y al mismo nivel tienen la misma presión hidrostática. Por lo tanto, en el caso de curvas, este es el principio que debe aplicarse y no es necesario escribir estos términos que resultan del recorrido en las curvas del manómetro.

Con lo anterior en mente, y considerando la presión atmosférica como cero, finalmente se llega al resultado. Nótese el manejo de las unidades en el ejercicio.

$$\begin{aligned} P - \gamma_2 h_2 &= 0 \\ P &= \gamma_2 h_2 = 0.85 \gamma_{\text{agua}} \\ h_2 &= 0.85 * 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} * 0.55 \text{m} \\ &= 4.58 \text{kPa} \end{aligned} \quad (89)$$

Ejercicio resuelto

Se requiere conocer la presión en un ducto que transporta gas natural, en un manómetro cuyas elevaciones y fluidos que lo componen se indican en la figura 38. Nótese también el manejo de las unidades, garantizando consistencia dimensional⁷.

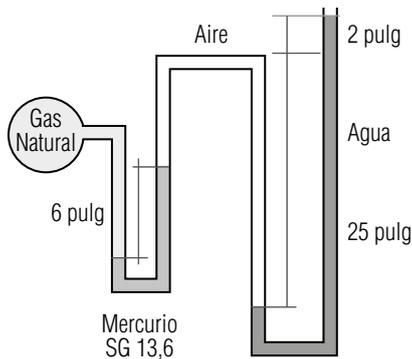


Figura 38. Presión en un ducto de gas natural. Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 106).

⁷ Tomado de Çengel y Cimbala (2006, p. 106).

$$P_{\text{gas}} - 6 \text{ pulg} * 13.6 * \gamma_{\text{agua}} - 27 \text{ pulg} * \gamma_{\text{agua}} = 0$$

$$P_{\text{gas}} = \gamma_{\text{agua}} 0.0254 \frac{m}{\text{pulg}} (13.6 * 6 \text{ pulg} - 27 \text{ pulg}) \quad (90)$$

$$P_{\text{gas}} = 13.6 \text{ kPa}$$

A continuación, se desarrollan otros ejercicios propuestos con el fin de afianzar esta metodología. Incluso es posible observar que esta puede ser aplicable a ejercicios clásicos de hidrostática que se plantean normalmente en la literatura especializada.

Ejercicio resuelto

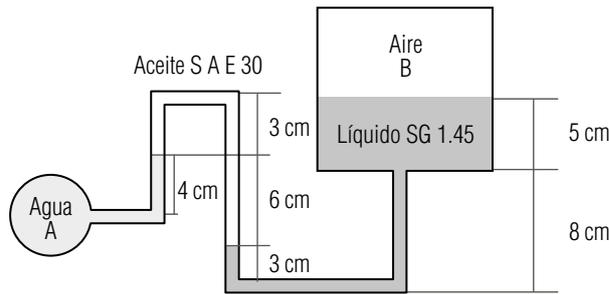


Figura 39. Ejercicio resuelto. Fuente: elaboración propia con base en White (2003, p. 111).

“La presión en el punto A es de 25 psi. Todos los fluidos están a 20 °C. ¿Cuál es la presión de aire en la cámara cerrada B en Pa?”⁸

Recordando nuestra metodología, vamos a recorrer el manómetro en un sentido (si se recorre en sentido contrario el resultado es equivalente. ¡Compruébelo!).

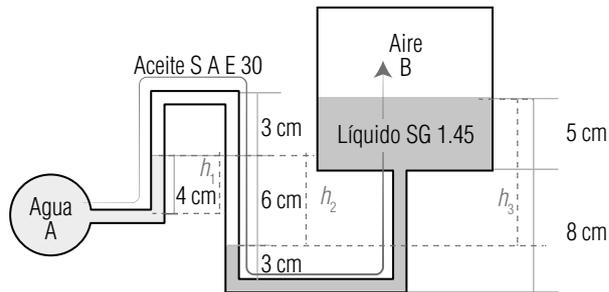


Figura 40. Ejercicio resuelto. Fuente: elaboración propia con base en White (2003, p. 111).

8 Tomado de White (2003, p. 11, problema 2.33).

Vamos a escoger el sentido de izquierda a derecha, y escribiremos una ecuación que involucre términos de presión hidrostática positivos si se descien- de, y negativos si se sube en el manómetro:

$$p_A - h_1 \gamma_{H_2O} + h_2 \gamma_{SAE30} - h_3 \gamma_{S.G. 1.45} = p_B \quad (91)$$

Trabajaremos este ejercicio en sistema inglés. Las alturas indicadas en la figura son $h_1 = 4 \text{ cm} = 1.57 \text{ pulg}$, $h_2 = 6 \text{ cm} = 2.36 \text{ pulg}$, $h_3 = 10 \text{ cm} = 3.94 \text{ pulg}$.

La gravedad específica del aceite SAE 30 es de 0.891 (según el libro de White). Con esto en mente reescribimos la ecuación:

$$\begin{aligned}
 p_A - h_1 * \gamma_{H_2O} + h_2 * 0.891 \gamma_{H_2O} - h_3 * 1.45 * \gamma_{H_2O} &= p_B \\
 p_A + \gamma_{H_2O} (-h_1 + h_2 * 0.891 - 1.45 * h_3) &= p_B \\
 25 \frac{\text{lb}_f}{\text{pul}_g^2} + 62.4 \frac{\text{lb}_f}{\text{ft}^3} * \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ pul}_g} \right)^3 (1.57 \text{ pul}_g + 2.36 \text{ pul}_g * 0.891 - 1.45 * 3.94 \text{ pul}_g) &= p_B \\
 p_B &= 24.81 \text{ psi}
 \end{aligned} \quad (92)$$

Ejercicio resuelto⁹

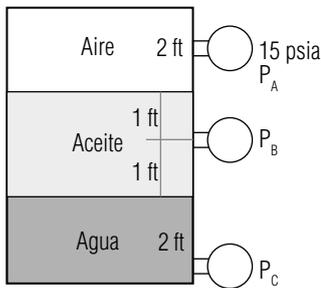


Figura 41. Ejercicio resuelto. Fuente: elaboración propia con base en White (2003, p. 108).

El sistema aire-aceite-agua está a 20 °C. Sabiendo que el manómetro A registra 15 psia y el manómetro B registra 1.25 psi menos que el manómetro en C, calcule:

- El peso específico del aceite en lb_f/ft^3
- La lectura presentada por el manómetro C en psia

Nuevamente aplicamos nuestra metodología de recorrer, ahora ya no el manómetro, sino el sistema en un sentido. Se escogerá de arriba hacia abajo, pero el sentido contrario es equivalente para nuestros propósitos.

⁹ Tomado de White (2003, p. 108, problema 2.15).

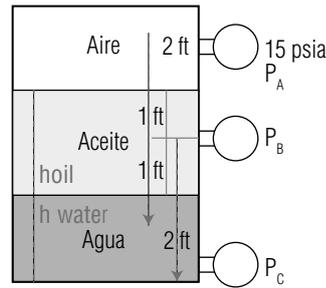


Figura 42. Ejercicio resuelto.
Fuente: elaboración propia con base en White (2003, p. 108).

Se plantea entonces la siguiente ecuación:

$$p_A + h_{\text{oil}} \gamma_{\text{oil}} + h_{\text{H}_2\text{O}} \gamma_{\text{H}_2\text{O}} = p_C \quad (93)$$

Cabe anotar que tenemos tres incógnitas (las lecturas de los manómetros en B y en C, y la gravedad específica del aceite). Requerimos más ecuaciones para encontrar estos interrogantes. Podemos plantear una ecuación adicional según las condiciones del problema:

$$p_B = p_C - 1,25 \quad (94)$$

Podemos plantear una tercera ecuación acoplada, que nos formaría un sistema con única solución de otra aplicación de la ecuación de la hidrostática (aplique el recorrido de la derecha):

$$p_B + n_{\text{oil}} * 1 \text{ ft} + n_{\text{H}_2\text{O}} * 2 \text{ ft} = p_C \quad (95)$$

Reemplace la ecuación 94 en la ecuación 95 y este resultado reemplácelo en la ecuación 93.

Se deja para el estudiante lo siguiente:

- Solucione el sistema siguiendo estos pasos y encuentre los valores de las incógnitas.
- En el ejercicio no se tuvo en cuenta la presión hidrostática del aire. Construya las ecuaciones anteriores teniendo en cuenta la presión hidrostática del aire con una densidad de 1.2 kg/m^3 ¿Cambian mucho los resultados?

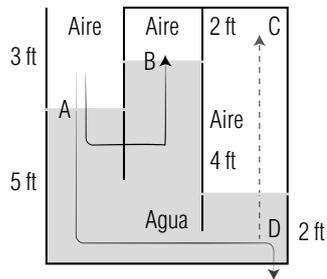
Ejercicio resuelto¹⁰

Figura 43. Ejercicio resuelto.
Fuente: elaboración propia con base en White (2003, p. 108).

Este problema puede solucionarse planteando varios recorridos en el sistema y escribiendo las correspondientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 p_A + \gamma_{\text{H}_2\text{O}} * 5 \text{ ft} &= p_D \\
 p_A - \gamma_{\text{H}_2\text{O}} * 1 \text{ ft} &= p_B \\
 p_A - \gamma_{\text{H}_2\text{O}} * 2 \text{ ft} - \gamma_{\text{air}} * 6 \text{ ft} &= p_C
 \end{aligned}
 \tag{96}$$

Se deja para el estudiante:

- Construya ecuaciones planteando otros recorridos. Por ejemplo, entre D y B o entre A y C. Los resultados deben coincidir.

¹⁰ Tomado de White (2003, p. 108, problema 2.17).

Flotabilidad

Es comúnmente conocido que un objeto pesa menos, o mejor, que se siente más ligero en un líquido que en el aire. Esta observación sugiere que el líquido ejerce una fuerza hacia arriba sobre el cuerpo sumergido en él. Esta fuerza que tiende a levantar el cuerpo se denomina fuerza de flotabilidad F_b ¹¹ o empuje hidrostático, una consecuencia más de la ecuación de Euler.

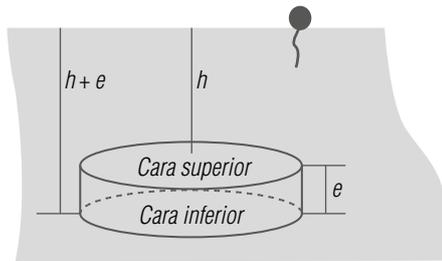


Figura 44. Objeto sumergido en el interior de un fluido.

Se tiene un cuerpo sumergido en forma de disco, el cual tiene un espesor e y se encuentra a una profundidad de sumersión h . Se considera también que las caras del disco están paralelas a la superficie libre del fluido. Nótese que la cara superior, que se encuentra a una profundidad h , experimentará una fuerza producto de la presión sobre esta superficie multiplicada por su área. La cara inferior experimentará una fuerza de la misma naturaleza, pero de todas formas superior, ya que se encuentra a una mayor profundidad $(h+e)$. Interesa encontrar la diferencia de fuerzas entre ambas superficies, que es finalmente el empuje que experimenta el disco y que intenta expulsarlo hacia arriba. Del razonamiento anterior se deduce que el empuje hidrostático es, también, una consecuencia de la ecuación de Euler.

El empuje hidrostático es finalmente:

$$\begin{aligned} F_B &= F_{inf} - F_{sup} \\ &= \rho_{fluido}g(h+e)A - \rho_{fluido}ghA \\ &= \rho_{fluido}geA \end{aligned} \quad (97)$$

El producto eA corresponde al volumen del cuerpo. Así pues, el empuje hidrostático o fuerza de flotabilidad es:

$$F_B = \rho_{fluido}g\forall \quad (98)$$

Una interpretación de este resultado es que el empuje hidrostático es igual al peso del fluido que el cuerpo sumergido desplaza cuando se introduce en él. Nótese que el empuje hidrostático es consecuencia del desplazamiento de volumen que se tiene al introducir un cuerpo en el interior de un fluido, mas no del área como normalmente intuyen los estudiantes novatos. Este fenómeno se conoce como **principio de Arquímedes**, y se le atribuye al ingeniero, matemático, físico y astrónomo de la Antigua Grecia Arquímedes de Siracusa.

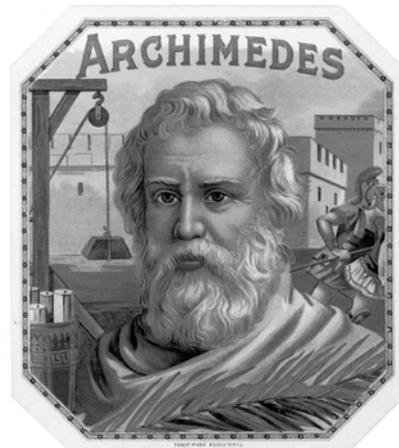


Figura 45. Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C).
Fuente: Wikipedia. Licencia WikiCommons
(bit.ly/24k7Vs1)

11 El subíndice b viene de la palabra inglesa “buoyancy”. Algunos textos traducen esta palabra como “boyantez”, posiblemente justificando esta notación.

Algo de historia. Se dice que el rey griego Hierón II ordenó la construcción de una nueva corona en oro. Queriendo comprobar la honestidad de sus orfebres, propuso el problema a Arquímedes de determinar si dicha corona era de oro macizo. Largo tiempo caviló Arquímedes estas cuestiones. Cuenta la leyenda que tomando un baño se percató de que un cuerpo, al sumergirse en el interior de un fluido, desplazaba una cantidad de agua igual a su volumen, lo cual solucionaba enormemente el problema propuesto, pues dada la irregularidad de la corona era complicado calcular el volumen. Conociendo este y su peso, podía estimarse la densidad de su material para compararla con la del oro y así determinar si efectivamente estaba hecha de oro macizo. Al solucionar el reto fue tanta la euforia de Arquímedes que salió desnudo por las calles de la ciudad gritando la palabra eureka (εὕρηκα), que significa “lo he encontrado”.

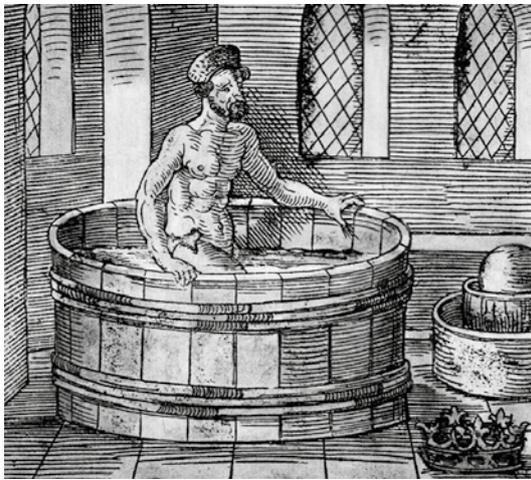


Figura 46. El baño de Arquímedes.
Fuente: Wikicommons (bit.ly/2JXCtww)

El final de Arquímedes fue trágico. Durante la Segunda Guerra Púnica, la ciudad de Siracusa fue asediada y fuertemente defendida gracias a ingeniosos artefactos de guerra diseñados por él. Fi-

nalmente, la ciudad cayó; se dice que fue gracias a un traidor. El general romano Marcelo mandó a llamar a Arquímedes con el propósito de conocer al genial inventor que por poco lo pone en retirada, y envió para ello a un soldado romano indicándole que respetara su vida. Al encontrar a Arquímedes le indicó que su general lo requería inmediatamente, mas Arquímedes no obedeció al instante, pues estaba meditando en la solución de un problema matemático. Esto bastó para que el soldado lo tomara como un desprecio hacia su general y, sin miramientos, asesinó a Arquímedes con su espada.

Fuerzas sobre superficies planas sumergidas

Una placa en el interior de un fluido está sometida a la presión que produce este a través de toda su superficie. Sobre una superficie plana, la presión hidrostática produce un sistema de fuerzas paralelas; y a menudo interesa determinar la magnitud de la fuerza resultante correspondiente a estas fuerzas y su punto de aplicación.

Esta situación es típica en aplicaciones como muros de contención, represas, cálculo de tanques, piscinas y diques.

Se puede considerar que en un problema hidrostático donde se involucren fuerzas sobre superficies interesará determinar la magnitud de dicha fuerza hidrostática resultante y su ubicación en la superficie de la placa. Adicionalmente, el problema en general intentará establecer una condición de equilibrio de la placa como cuerpo rígido; por lo tanto, es muy común que este tipo de problemas se remitan a la solución de un problema basado en los principios de la estática, más que en la hidrostática.

Estrategia de solución

Aunque no es una receta a seguir (cada problema debe analizarse debidamente), se puede proponer una estrategia de solución que cubre gran variedad de problemas de fuerzas sobre superficies. Dicha estrategia se sintetiza en los siguientes tres pasos:

1. Determine la magnitud de la fuerza hidrostática resultante sobre la superficie.
2. Determine la ubicación del punto de aplicación de la fuerza hidrostática resultante (centro de presiones)
3. Aplique los principios de la estática, en dado caso, para determinar finalmente lo que se solicite.

Determinación de la magnitud de la fuerza resultante

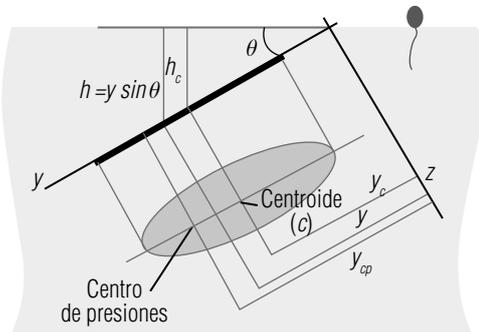


Figura 47. Modelo de fuerzas sobre una superficie plana.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 80).

Presión en un punto de la placa:

$$P = P_o + \rho gh = P_o + \rho g y \sin \theta \quad (99)$$

Fuerza resultante sobre la placa:

$$\begin{aligned} F_R &= \int_A P dA = \int_A (P_o + \rho g y \sin \theta) dA \\ &= P_o A + \rho g \sin \theta \int_A y dA \end{aligned} \quad (100)$$

La expresión:

$$\int_A y dA \quad (101)$$

corresponde al primer momento de área de la superficie sumergida. Se relaciona con el centroide de esta superficie según la siguiente ecuación:

$$y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA \quad (102)$$

Reemplazando en la ecuación anterior se tiene:

$$\begin{aligned} F_R &= P_o A + \rho g y_c A \sin \theta \\ F_R &= (P_o + \rho g y_c \sin \theta) A \\ &= (P_o + \rho g h_c) A \\ &= P_c A \end{aligned} \quad (103)$$

La magnitud de la fuerza que actúa sobre una placa totalmente sumergida en un fluido de densidad constante es igual al producto de la presión en el centroide de la placa multiplicada por el área.

Determinación del punto de aplicación de la fuerza resultante (centro de presiones)

Para determinar ahora el punto de aplicación de la fuerza resultante (centro de presiones), se establece un modelo estático equivalente en donde la suma de momentos de las fuerzas distribuidas debe ser igual al momento de la fuerza resultante.

$$\begin{aligned} F_R y_p &= \int_A y P dA = \int_A y (P_o + \rho g y \sin \theta) dA \\ &= P_o y_c A + \rho g \sin \theta \int_A y^2 dA \end{aligned} \quad (104)$$

La expresión:

$$\int_A y^2 dA \quad (105)$$

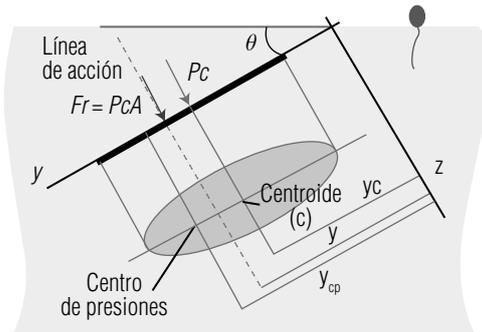


Figura 48. Modelo equivalente para el centro de presiones.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 81).

corresponde al segundo momento de área de la superficie con respecto al eje X que pasa por el origen (punto O). Por lo tanto, la coordenada de centro de presiones viene dada por:

$$F_R y_P = P_O y_C A + \rho g I_{XX,O} \sin \theta \quad (106)$$

Recordando el teorema de Steiner (ejes paralelos):

$$I_{XX,O} = I_{XX,C} + y_C^2 A$$

Y reemplazándolo en la ecuación del centro de presiones, se tiene:

$$\begin{aligned} F_R y_P &= P_O y_C A + \rho g (I_{XX,C} + y_C^2 A) \sin \theta \\ F_R y_P &= P_O y_C A + \rho g I_{XX,C} \sin \theta + \rho g y_C^2 A \sin \theta \\ F_R y_P &= (P_O A + \rho g y_C A \sin \theta) y_C + \rho g I_{XX,C} \sin \theta \end{aligned} \quad (107)$$

Despejando la coordenada del centro de presiones y reemplazando por la expresión de la fuerza resultante, se tiene:

$$\begin{aligned} y_P &= y_C + \frac{\rho g I_{XX,C} \sin \theta}{P_O A + \rho g y_C A \sin \theta} \\ y_P &= y_C + \frac{I_{XX,C}}{\frac{P_O A + \rho g y_C A \sin \theta}{\rho g \sin \theta}} \\ y_P &= y_C + \frac{I_{XX,C}}{\left[\frac{P_O A}{\rho g \sin \theta} + y_C \right] A} \end{aligned} \quad (108)$$

Normalmente se trabaja con presiones manométricas, así que la expresión anterior se reduce a:

$$y_P = y_C + \frac{I_{XX,C}}{y_C A} \quad (109)$$

El centro de presiones de una placa plana sumergida se encuentra por debajo del centroide de la placa a una distancia $I_{xx,c}/y_C A$.

Fuerzas hidrostáticas sobre superficies curvas

La obtención de la fuerza hidrostática sobre una superficie curva es más complicada, ya que las fuerzas aplicadas sobre la superficie cambian de magnitud y dirección. No obstante, se pueden calcular las componentes horizontal y vertical de la fuerza que la compuerta ejerce sobre el bloque de fluido contenida por la superficie.

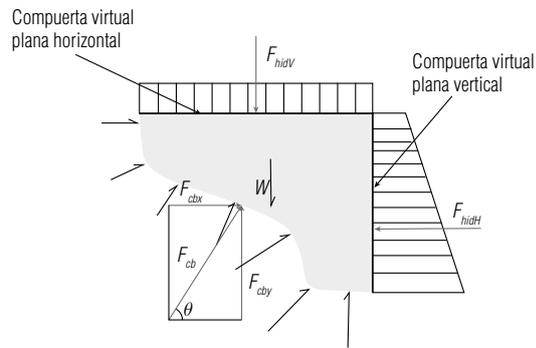


Figura 49. Bloque de fluido encerrado por una compuerta curva cóncava.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 86).

Haciendo una sumatoria de fuerzas en la dirección horizontal e igualando a cero, se tiene que la componente horizontal de la fuerza sobre la superficie curva es:

$$F_{cbx} = F_{hid-H} \quad (110)$$

Haciendo una sumatoria de fuerzas en la dirección vertical e igualando a cero, se tiene que la componente vertical de la fuerza sobre la superficie curva es:

$$F_{cby} = F_{hid-v} + w \quad (111)$$

Una interpretación para el valor de esta última componente es que **la fuerza de la compuerta sobre el bloque en la dirección vertical es igual en magnitud al peso de fluido (real) que se encuentra encima de la compuerta.**

Las fuerzas F_{hidh} o F_{hidv} se pueden interpretar como las fuerzas hidrostáticas sobre compuertas virtuales (imaginarias) planas, horizontales y verticales respectivamente. Obsérvese que, de la primera ecuación, la componente en dirección x de la fuerza de la compuerta sobre el bloque de fluido sería igual en magnitud a la fuerza hidrostática sobre la compuerta plana virtual vertical. De la segunda ecuación se puede concluir que la componente en y de la fuerza de la compuerta sobre el bloque de fluido es igual en magnitud a la fuerza sobre la compuerta virtual plana horizontal. En otras palabras, es posible considerar, entonces, que la solución al problema de hallar la fuerza resultante sobre una superficie curva sumergida se puede descomponer en la solución de dos problemas de **compuertas virtuales planas: una vertical, correspondiente a la proyección vertical de la compuerta, y una horizontal, correspondiente a la proyección horizontal de la compuerta.**

Las componentes rectangulares halladas pueden sumarse vectorialmente, obteniéndose así la fuerza resultante en magnitud:

$$\|F_{cb}\| = \sqrt{\|F_{cbx}\|^2 + \|F_{cby}\|^2} \quad (112)$$

La dirección de la fuerza también puede hallarse fácilmente por trigonometría:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\|F_{cby}\|}{\|F_{cbx}\|} \quad (113)$$

Se determinan así la magnitud y la dirección de la fuerza; no obstante, faltaría determinar la línea de acción de la fuerza. En el caso de compuertas curvas circulares, existe una propiedad interesante (y afortunada), fundamentada en la geometría de una circunferencia. La línea normal a una tangente de la circunferencia pasa por el centro de ella. Esta propiedad es afortunada, dado que esta es la dirección de las líneas de acción de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre la compuerta y, a su vez, de la resultante.

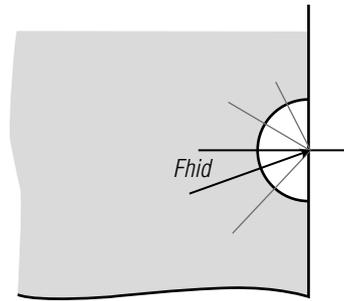


Figura 50. La línea de acción de las fuerzas hidrostáticas pasa por el centro de curvatura de la compuerta curva circular.

Para el caso mostrado en la figura 49, imponiendo una condición de equilibrio en el bloque de fluido, se tiene:

$$\begin{aligned} F_{cbx} &= F_{hid-H} \\ F_{cby} &= F_{hid-v} - w \end{aligned} \quad (114)$$

La primera ecuación no plantea ninguna diferencia con una compuerta curva cóncava. En la segunda sí debemos hacer un pequeño análisis. Para ilustrarlo, obsérvese la figura 52.

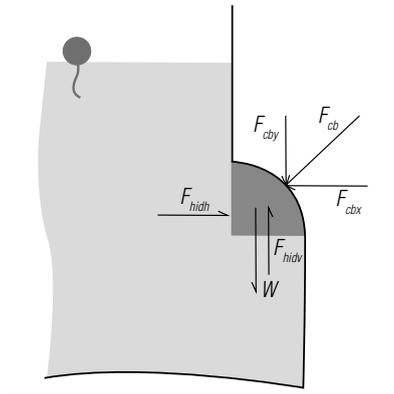


Figura 51. Compuerta curva convexa.

La F_{hidv} sería igual al peso del fluido que existe sobre la compuerta plana horizontal, es decir, sería equivalente al peso de una columna de fluido que se soportara sobre esta compuerta plana virtual horizontal. W es el peso del bloque de fluido. Aplicando la última ecuación, es decir, restando W de F_{hidv} , se tiene un peso de una columna de fluido imaginario (virtual) que existiría sobre la compuerta, que sería igual en magnitud a la F_{cby} .

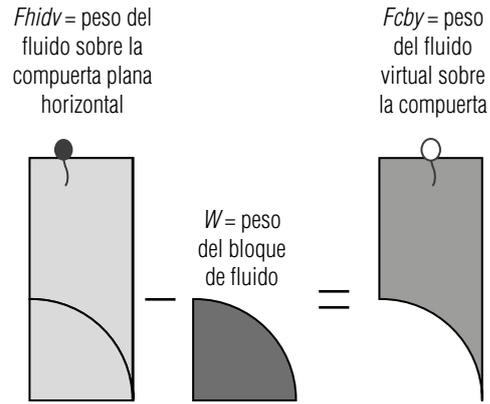


Figura 52. La componente vertical de fuerza de la compuerta sobre el bloque de fluido es igual al peso de un fluido virtual sobre la compuerta.

Por último, se debe tener presente que estos razonamientos nos permiten encontrar la fuerza de la compuerta sobre el bloque de fluido (F_{cb}). En general, se debe conocer la fuerza del bloque de fluido sobre la compuerta (F_{bc}), que será una reacción a la F_{cb} . Es decir, es una fuerza de igual magnitud y dirección, pero de sentido contrario.

Ejercicio resuelto¹²

La compuerta de la figura pesa 300lb por cada pie perpendicular al plano del papel. Se encuentra articulada en O y su centro de gravedad se encuentra a 1.5 pies de la parte vertical y 2 pies arriba de la parte horizontal. Determínese la posición de la superficie libre del agua necesaria para que la compuerta se abra en su parte horizontal:

Inicialmente se elabora un DCL de la compuerta. A partir de este se desarrolla una sumatoria de momentos con respecto al pasador en O , dando como resultado la figura 54.

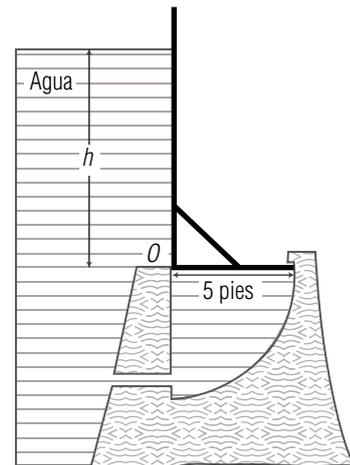


Figura 53. Problema resuelto. Fuente: elaboración propia con base en Streeter (1981, pp. 1-16).

12 Tomado de Streeter y Wylie (1981, p. 103).

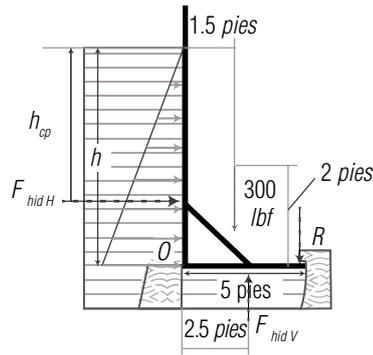


Figura 54. DCL de compuerta.
Fuente: elaboración propia con base en Streeter (1981, pp. 1-16).

$$\sum M_O = F_{hidH}(h - h_{cp}) - F_{hidV}(2.5 \text{ ft}) + R(5 \text{ ft}) = 0 \quad (115)$$

Para el momento en que la puerta se abre, la reacción R se hace 0. Además, la profundidad del centro de presiones en la porción vertical es:

$$h_{cp} = h_c + \frac{I_{XX,C}}{h_c A} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{1}{12}h^3}{\frac{h}{2}h} = \frac{h}{2} + \frac{2h^3}{12h^2} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{4h}{6} = \frac{2h}{3} \quad (116)$$

Con las anteriores consideraciones, la sumatoria de momentos queda:

$$\begin{aligned} F_{hidH} \left(h - \frac{2h}{3} \right) &= F_{hidV} (2.5) \\ F_{hidH} \left(\frac{h}{3} \right) &= F_{hidV} (2.5) \end{aligned} \quad (117)$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} F_{hidH} &= \gamma_{H_2O} h_c = \gamma_{H_2O} \frac{h}{2} = \frac{\gamma_{H_2O} h^2}{2} \\ F_{hidV} &= \gamma_{H_2O} h A = \gamma_{H_2O} h * 5 = 5 \gamma_{H_2O} h \end{aligned} \quad (118)$$

Reemplazando los resultados de 116, 117 y 118 en 115:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_{H_2O} h^2}{2} \left(\frac{h}{3} \right) &= 5 \gamma_{H_2O} h (2.5) \\ \frac{h^3}{6} &= 12.5h \\ h^2 &= 75 \\ h &= 8.66 \text{ ft} \end{aligned} \quad (119)$$

Ejercicio resuelto¹³

Se debe construir un muro de contención contra un derrumbe de lodo con bloques rectangulares de concreto $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ de 0.8 m de altura y 0.2 m de ancho. El coeficiente de fricción f entre el suelo y los bloques es de 0.3, y la densidad del lodo es alrededor de 1800 kg/m^3 . Existe la preocupación de que los bloques de concreto puedan resbalarse o voltearse sobre el borde izquierdo inferior conforme suba el nivel del lodo. Determine la altura del lodo a la cual a) los bloques vencerán la fricción y resbalarán; b) los bloques se voltearán.

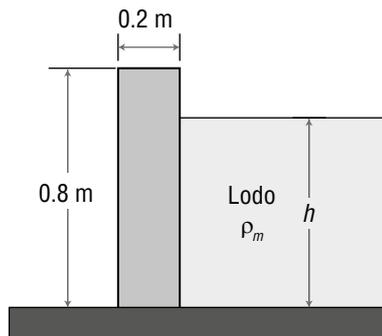


Figura 55. Ejercicio resuelto.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 110).

El DCL muestra las fuerzas interactuantes:

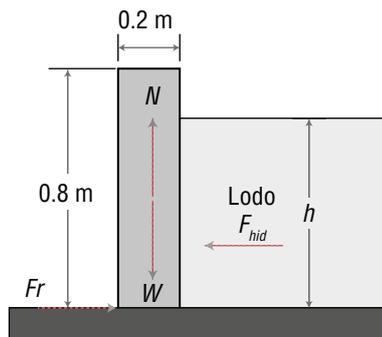


Figura 56. DCL.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 110).

Se realizarán los análisis solicitados por cada metro de longitud de muro de contención.

¹³ Tomado de Çengel y Cimbala (2006, p. 110).

Análisis de deslizamiento. Peso del bloque

$$\begin{aligned} \forall_{\text{bloque}} &= 0.8m * 0.2m * 1m = 0.16m^3 \\ w_{\text{bloque}} &= \rho g \forall_{\text{bloque}} = 2700 \frac{\text{kg}}{m^3} * 9.8 \frac{m}{s^2} * 0.16m^3 = 4234N \end{aligned} \quad (120)$$

Planteando condición de equilibrio a lo largo de la dirección horizontal:

$$F_{\text{hid}} = F_r = \mu_{\text{est}} N \quad (121)$$

De la condición de equilibrio en la dirección vertical:

$$N = w_{\text{bloque}} \quad (122)$$

La fuerza hidrostática viene dada por:

$$\begin{aligned} F_{\text{hid}} &= \rho g \frac{h}{2} A = 1800 \frac{\text{kg}}{m^3} * 9.8 \frac{m}{s^2} * \frac{h}{2} * h * 1m \\ F_{\text{hid}} &= 8820 \frac{N}{m^2} h^2 \end{aligned} \quad (123)$$

Nótese en este ejercicio la utilización permanente de las unidades.

Reemplazando este último resultado en la ecuación 121:

$$\begin{aligned} 8820 \frac{N}{m^2} h^2 &= 0.3 * 4234N \\ h^2 &= \frac{1270N}{8820 \frac{N}{m^2}} \\ h &= 0.38m \end{aligned} \quad (124)$$

Análisis de volcamiento: en el caso de un volcamiento, la fuerza normal se concentra hacia el borde inferior izquierdo del muro. Haciendo una sumatoria de momentos con respecto a este borde, se tiene:

$$\begin{aligned} w_{\text{bloque}} * 0.1m - F_{\text{hid}} \frac{h}{3} &= 0 \\ 4238N * 0.1m &= 8820 \frac{N}{m^2} h^2 \frac{h}{3} \\ 423.8Nm &= 2490 \frac{N}{m^2} h^3 \end{aligned} \quad (125)$$

$$h^3 = \frac{423.8 Nm}{2490 \frac{N}{m^2}} = 0.144 m^3$$

$$h = 0.52 m$$

Pregunta: ¿qué ocurriría primero, el deslizamiento o el volteo de los bloques?

Ejercicio resuelto¹⁴

El flujo de agua desde un recipiente se controla por una compuerta en forma de L y de 5 pies de ancho, articulada en el punto A. Si se desea que la compuerta se abra cuando la altura del agua sea de 12 pies, determine el peso necesario para que la compuerta cumpla su función.

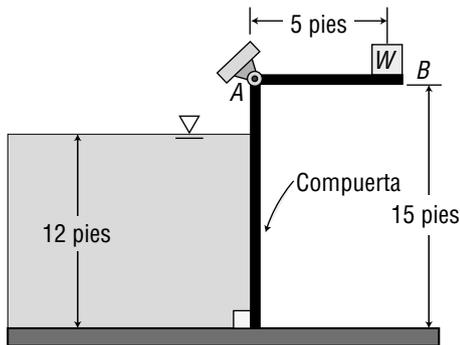


Figura 57. Ejercicio resuelto. Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 110).

Se inicia, como siempre, con la elaboración correcta de un DCL de la compuerta.

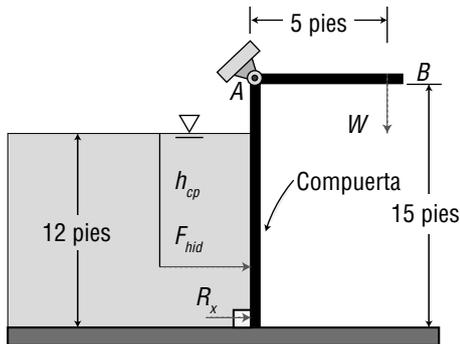


Figura 58. DCL Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala, (2006, p. 110).

Cálculo de la fuerza hidrostática:

$$F_{hid} = \gamma_{H_2O} h_c A = 62.2 \frac{lb_f}{ft^3} * 6 ft * 12 ft * 5 ft = 22464 lb_f \quad (126)$$

Al momento de la apertura de la compuerta, la reacción R_x se anula.

Ahora con una sumatoria de momentos con respecto al punto A se encuentra el valor de w :

$$\begin{aligned} \sum M_A &= w * 5 ft - F_{hid} (h_{cp} + 3 ft) \\ w &= \frac{22464 * (8 ft + 3 ft)}{5 ft} = 49421 lb_f \end{aligned} \quad (127)$$

Ejercicio resuelto¹⁵

Se utiliza un cilindro sólido largo de 2 pies de radio, articulado en el punto A como compuerta automática. Cuando el nivel del agua llega a 15 pies, la compuerta cilíndrica se abre girando en torno a la articulación en el punto A. Determine: a) la fuerza hidrostática que actúa sobre el cilindro y su línea de acción cuando la compuerta se abre; b) el peso del cilindro por su longitud en pies.

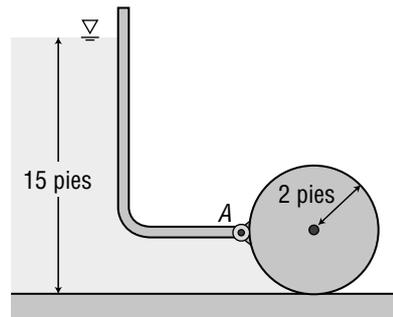


Figura 59. Ejercicio resuelto.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 109).

Se inicia con el DCL de la porción de fluido confinado por la compuerta:

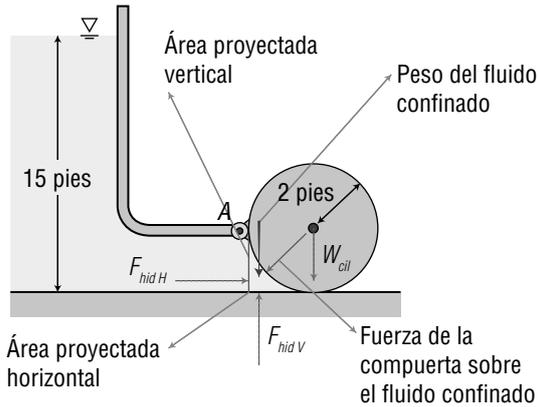


Figura 60. DCL.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 109).

Cálculo de la fuerza hidrostática horizontal

$$F_{hidH} = \gamma_{H_2O} h_c A_{proyH} = 62.4 \frac{lb_f}{ft^3} 14 ft * 2 ft * 1 ft \quad (128)$$

$$F_{hidH} = 1747 lb_f$$

Ahora, la componente horizontal de la fuerza de la compuerta es igual a la fuerza hidrostática horizontal:

$$F_{hidH} = F_H = 1747 lb_f \quad (129)$$

Hallemos ahora la componente vertical de la fuerza de la compuerta. Planteando una condición de equilibrio para la porción de líquido confinado, se tiene:

$$F_{hidV} - w - F_V = 0$$

$$F_V = F_{hidV} - w = \gamma_{H_2O} * 15 ft * 2 ft * 1 ft$$

$$- \left[(2 ft * 2 ft) - \frac{\pi (2 ft)^2}{4} \right] * ft * \gamma_{H_2O} \quad (130)$$

$$F_V = 1872 lb_f - 53 lb_f = 1819 lb_f$$

Ahora se puede hallar la resultante de la fuerza sobre la compuerta:

$$F_{hidR} = \sqrt{(1747 lb_f)^2 + (1819 lb_f)^2} = 2522 lb_f \quad (131)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1819}{1747} \right) = 46^\circ$$

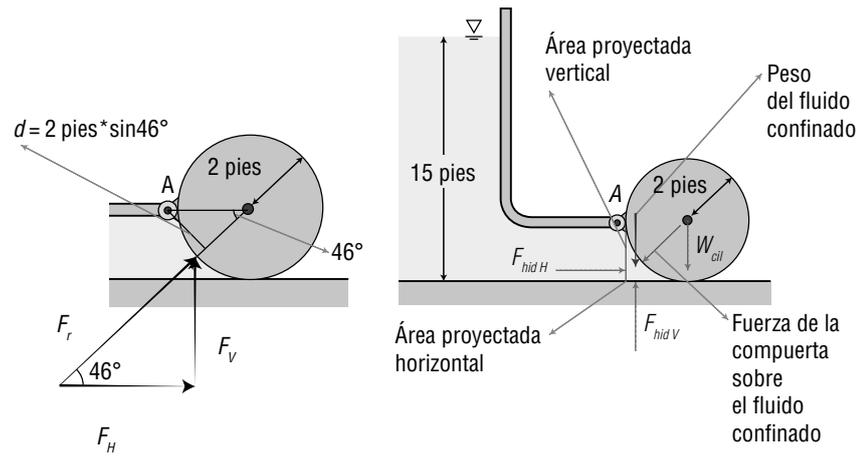


Figura 61. Fuerza hidrostática resultante.

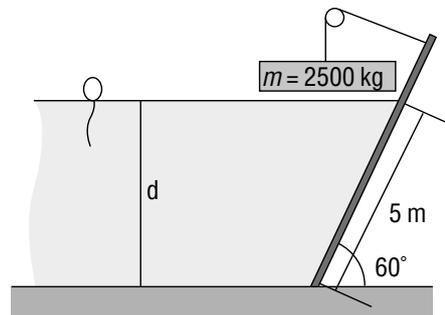
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 109).

Para hallar el peso del cilindro, hacemos una suma de momentos con respecto al punto A:

$$\begin{aligned} \sum M_A &= w_{cil} * 2\text{ft} - F_{hidR} * 2 * \sin 46^\circ = 0 \\ w_{cil} &= \frac{2514\text{lbf} * 1.44\text{ft}}{2\text{ft}} = 1810\text{lbf} \end{aligned} \quad (132)$$

Ejercicio resuelto¹⁶

La compuerta mostrada es de 3 m de ancho. Para efectos de análisis, se puede considerar de peso despreciable. ¿Para qué profundidad d se encuentra en equilibrio la compuerta?



La solución de este interesante ejercicio muestra

Figura 62.

Fuente: elaboración propia con base en Pritchard (2011, p. 89).

un pertinente manejo algebraico del problema, dejando el reemplazo de datos para el final y comprobando con análisis dimensional la validez del resultado.

Aplicando el método propuesto, se hallará primero el valor de la fuerza resultante.

$$\begin{aligned}
 F_{hid} &= P_{centr} A \\
 F_{hid} &= \gamma_w * \frac{d}{2} * \frac{d}{\sin 60^\circ} * a \\
 F_{hid} &= \frac{\gamma_w d^2 a}{2 \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\gamma_w d^2 a \sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}
 \tag{133}$$

Siendo a el ancho de la compuerta.

Se halla ahora la ubicación del centro de presiones:

$$\begin{aligned}
 y_{cp} &= y_c + \frac{I_{xx,c}}{y_c A} = \frac{d}{2 \sin 60^\circ} + \frac{\frac{1}{12} * a * \left(\frac{d}{\sin 60^\circ}\right)^3}{\frac{d}{2 \sin 60^\circ} * \frac{d}{\sin 60^\circ} * a} \\
 y_{cp} &= \frac{d}{2 \sin 60^\circ} + \frac{d}{6 \sin 60^\circ}
 \end{aligned}
 \tag{134}$$

La figura 63 muestra la ubicación de la fuerza hidrostática resultante para el problema propuesto.

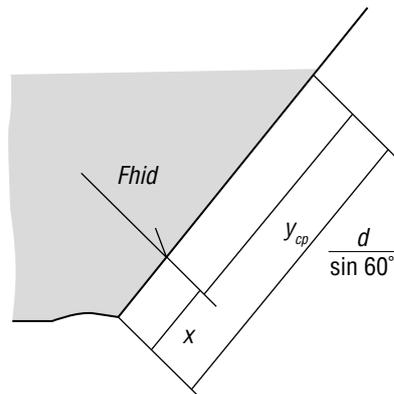


Figura 63. Ubicación de la fuerza hidrostática del problema 3-65.
Fuente: elaboración propia con base en Pritchard (2011, p. 89).

Con el fin de aplicar una condición de equilibrio para la compuerta, se requiere conocer la distancia x al punto de pivote, dado que la intención es aplicar una sumatoria de momentos con respecto a dicho pivote. Esta distancia x viene dada por la siguiente expresión:

$$x = \frac{d}{\sin 60^\circ} - y_{cp}$$

$$x = \frac{d}{\sin 60^\circ} - \frac{d}{2 \sin 60^\circ} - \frac{d}{6 \sin 60^\circ} = \frac{2d}{6 \sin 60^\circ} = \frac{d}{3 \sin 60^\circ} = \frac{2d}{3\sqrt{3}} \quad (135)$$

Al hacer ahora suma de momentos con respecto al pivote, se tiene:

$$\sum M_{pivote} = 12500 \text{kgf} \cdot m - \frac{\gamma_w d^2 a \sqrt{3}}{3} * \frac{2d}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\gamma_w d^3 a}{9} = 12500 \text{kgf} \cdot m \quad (136)$$

$$d^3 = \frac{9 * 12500 \text{kgf} \cdot m}{2\gamma_w d^3 a} = \frac{9 * 12500 \text{kgf} \cdot m}{2 * 1000 \frac{\text{kgf}}{\text{m}^3} * 3m} = 18.75 \text{m}^3$$

$$d = 2.65 \text{ cm}$$

Es probable que el estudiante se vea tentado a incorporar el valor de a en la solución desde un principio. Se invita a que siga este procedimiento desde la ecuación para la fuerza hidrostática. Así se dará cuenta que, al final, las unidades no darán resultados coherentes y se generarán confusiones inútiles, por el simple hecho de no dejar la aplicación de las unidades para el final del ejercicio.

Hidrodinámica. Ecuaciones de conservación

Es probable que en el transcurso de la carrera se haya trabajado con ecuaciones o enunciados de conservación. En la mecánica de fluidos, estas ecuaciones son útiles para solucionar gran variedad de problemas reales de fluidos en movimiento, es decir, de hidrodinámica. Las ecuaciones de conservación más utilizadas son las siguientes:

- Ecuación de conservación de la masa.
- Ecuación de conservación de la energía: se tienen dos expresiones, la ecuación de Bernoulli (conservación de la energía mecánica) y la ecuación de la energía (balance de energía mecánica).
- Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

Ecuaciones de conservación de la masa (volumen de control)

Hasta el momento es probable que se haya trabajado con masas de fluidos que no variaban en su cantidad, es decir, se trabajaba con sistemas cerrados que no permitían el intercambio de masa, pero sí de interacciones como calor, fuerza, etc. A este tipo de sistema se le conoce como **masa de control**.

Para abordar los problemas de los fluidos en movimiento, es necesario considerar una región del espacio o volumen de control en el cual se pueden tener interacciones de intercambio de masa o de energía. Lo anterior corresponde a otro tipo de sistema denominado **sistema abierto**.



Figura 64. Representación de un sistema cerrado.

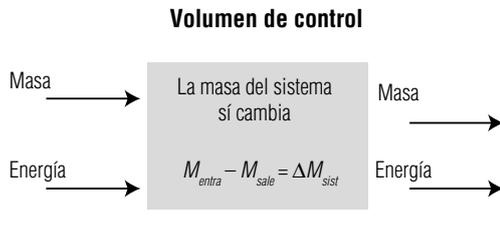


Figura 65. Representación de un sistema abierto.

La transferencia neta de masa hacia adentro o hacia afuera del volumen de control es igual al cambio neto (aumento o disminución) en la masa total que está dentro del volumen de control:

$$m_{ent} - m_{sal} = \Delta m_{vc} \quad (137)$$

Analizando estos cambios de masa por unidad de tiempo, y haciendo que el intervalo de análisis de tiempo sea muy pequeño:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{m_{ent}}{\Delta t} - \frac{m_{sal}}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m_{vc}}{\Delta t} \quad (138)$$

$$\frac{dm_{ent}}{dt} - \frac{dm_{sal}}{dt} = \frac{dm_{vc}}{dt}$$

$$\dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal} = \frac{dm_{vc}}{dt}$$

El término \dot{m} se denomina flujo másico y corresponde a la cantidad de masa que ingresa o sale del volumen de control por unidad de tiempo.

Las unidades de flujo másico pueden ser las siguientes, entre otras, según el contexto:

$$[\dot{m}] = \left[\frac{kg}{s} \right] \left[\frac{lbm}{s} \right] \quad (139)$$

En general, la masa total dentro del volumen de control se puede hallar sumando la masa de elementos diferenciales dm , donde:

$$m_{vc} = \int_{vc} \rho dV \quad (140)$$

Y la variación de masa dentro del volumen de control sería:

$$\frac{dm_{vc}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV \quad (141)$$

Nos da, entonces, una forma general de la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{dm_{ent}}{dt} - \frac{dm_{sal}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV \quad (142)$$

Se define el caudal \dot{V} como la cantidad de volumen de fluido que cruza una superficie del volumen de control en la unidad de tiempo. Dicho caudal se puede calcular con el producto de la velocidad del fluido multiplicado por el área que efectivamente cruza.

$$\dot{V} = \vec{V} \cdot \vec{A} \quad (143)$$

Bajo esta definición, las unidades del caudal serían:

$$[\dot{V}] = \frac{L}{t} * L^2 = \frac{L^3}{t} \left[\frac{m^3}{s} \right] \left[\frac{gal}{min} \right] \left[\frac{ft^3}{s} \right] \quad (144)$$

El flujo másico se relaciona con el caudal de la siguiente manera:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} \quad (145)$$

Para un régimen de flujo estacionario se debe cumplir que la variación con respecto al tiempo de las propiedades en el volumen de control debe

ser nula. Con lo anterior, se debe cumplir que $\dot{m}_{ent} - \dot{m}_{sal} = 0$.

Por lo tanto:

$$\rho_{ent} \dot{V}_{ent} = \rho_{sal} \dot{V}_{sal} \quad (146)$$

Otra consideración que se puede tener en cuenta es que se va a trabajar con un fluido incompresible. Lo anterior implica que los cambios de densidad, con respecto a la presión, son despreciables (como es el caso de los líquidos y gases a bajas presiones). Con esto presente, la densidad se considera constante y se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{ent} &= \dot{V}_{sal} \\ V_{ent} A_{ent} &= V_{sal} A_{sal} \end{aligned} \quad (147)$$

Ecuación de Bernoulli

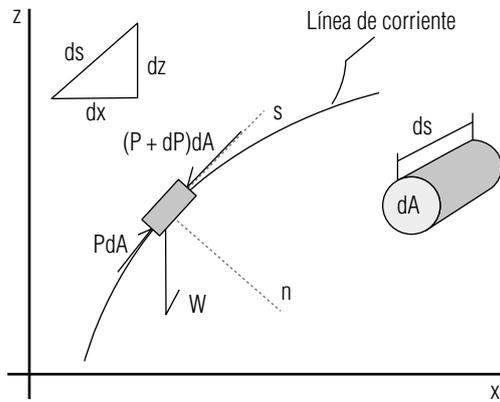


Figura 66. Modelo para la ecuación de Bernoulli. Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 187).

Se analizará ahora lo que sucede a una masa de fluido que se mueve en el interior de un flujo estacionario. Para este tipo de flujo, tanto las líneas de corriente como las líneas de trayectoria coinciden.

Para el análisis fijemos un sistema coordenado n - s (normal-tangencial) con la coordenada s dirigida a lo largo de la trayectoria y la coordenada n dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Apliquemos entonces la segunda ley de Newton a lo largo de este eje s :

$$\sum F_s = ma_s = mV \frac{dV}{ds} \quad (148)$$

Como se ve en la figura, las fuerzas sobre la porción de fluido a lo largo de s se reemplazan en la ecuación anterior, lo que da como resultado:

$$\begin{aligned} PdA - (P + dP)dA - w \sin \theta &= mV \frac{dV}{ds} \\ -dPdA - w \sin \theta &= mV \frac{dV}{ds} \end{aligned} \quad (149)$$

También se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} m &= \rho \nabla = \rho dA ds \\ \sin \theta &= \frac{dz}{ds} \\ w &= mg = \rho g dA ds \end{aligned} \quad (150)$$

Reemplazando las relaciones de 150 en 149 se tiene:

$$\begin{aligned} -dP dA - \rho g dA ds \frac{dz}{ds} &= \rho dA ds V \frac{dV}{ds} \\ -dP - \rho g dz &= \rho V dV \end{aligned} \quad (151)$$

Se tiene también la siguiente relación:

$$V dV = \frac{1}{2} d(V^2) \quad (152)$$

Reemplazando 152 en 151 dividiendo entre la densidad, se tiene:

$$\frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2} d(V^2) + g dz = 0 \quad (153)$$

Integrando la ecuación 153 para el caso de un flujo estacionario se llega a:

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cte \quad (154)$$

(a lo largo de una línea de corriente)

A su vez, si se considera que se trata de un fluido incompresible, la integral de la ecuación 154 se facilita bastante; se tiene entonces:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cte \quad (155)$$

La anterior ecuación se conoce como la ecuación de Bernoulli, atribuida al famoso matemático suizo-holandés Daniel Bernoulli (1700-1782), de amplia utilización en la mecánica de fluidos para flujo estacionario e incompresible a lo largo de una línea de corriente. Si dicha ecuación se establece sobre dos puntos de la misma línea de corriente, la ecuación se reescribe así:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \quad (156)$$



Figura 67. Daniel Bernoulli.

Fuente: ETH Library. Licencia WikiCommons (bit.ly/2Y77YhF).

Ecuación de Bernoulli en términos de energía específica

Analicemos cada uno de los términos de la ecuación de Bernoulli a través de análisis dimensional

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3}} = \frac{N \cdot m}{kg} = \frac{\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot m}{kg} = \frac{m^2}{s^2} \quad (157)$$

Nótese que inicialmente en el desarrollo de la ecuación 157 se tienen $\frac{N \cdot m}{kg} = \frac{J}{kg}$ julios por

kilogramo, unidades de energía por unidad de masa o **energía específica**. Al desarrollar un poco más el análisis, se puede expresar en términos de unidades fundamentales, teniendo como resultado $\frac{m^2}{s^2}$. El término $\frac{P}{\rho}$ se denomina, entonces, **energía de flujo**.

Para el siguiente término se tiene:

$$\frac{V^2}{2} = \left(\frac{m}{s}\right)^2 = \frac{m^2}{s^2} \quad (158)$$

El término $\frac{V^2}{2}$ se denomina entonces **energía cinética**.

Para el tercer término se tiene:

$$gz = \frac{m}{s^2} \cdot m = \frac{m^2}{s^2} \quad (159)$$

El término gz se denomina **energía potencial**.

La suma de estas tres energías se denomina **energía hidráulica**. Así pues, se debe tener presente que la energía hidráulica (atribuida a un fluido) es la

suma de tres componentes: una energía de flujo, una energía cinética y una energía potencial.

Una expresión que sintetiza la filosofía de la ecuación de Bernoulli es la siguiente:

La suma de las energías de flujo, cinética y potencial de una partícula de fluido es constante a lo largo de una línea de corriente en el transcurso del flujo estacionario cuando los efectos de la compresibilidad y de la fricción (viscosidad) son despreciables.

Ecuación de Bernoulli en términos de presión

Se multiplica ahora la ecuación de Bernoulli por la densidad, lo cual da como resultado:

$$P + \rho \frac{V^2}{2} + \rho g z = cte \quad (160)$$

Analicemos nuevamente cada uno de sus términos utilizando análisis dimensional. El primer término tiene unidades de presión $\frac{N}{m^2}$. Este término se denomina **presión estática**.

Para el siguiente término se tiene:

$$\rho \frac{V^2}{2} = \frac{kg}{m^3} * \frac{m^2}{s^2} * m = \frac{N}{m^2} \quad (161)$$

El término $\frac{\rho V^2}{2}$ se denomina **presión dinámica**.

Para el siguiente término se tiene:

$$\rho g z = \frac{kg}{m^3} * \frac{m}{s^2} * m = \frac{N}{m^2} \quad (162)$$

El término $\rho g z$ se denomina **presión hidrostática**.

Así pues, la ecuación de Bernoulli puede escribirse también en términos de presiones:

La suma de las presiones estática, dinámica e hidrostática se denomina **presión total**. Una expresión alterna de la ecuación de Bernoulli será entonces: La presión total a lo largo de una línea de corriente es constante.

Una aplicación de la ecuación de Bernoulli en términos de presiones es el dispositivo denominado **tubo de Pitot**. Su constitución básica se muestra en la figura 68 y se atribuye al ingeniero francés Henri Pitot (1695-1771).

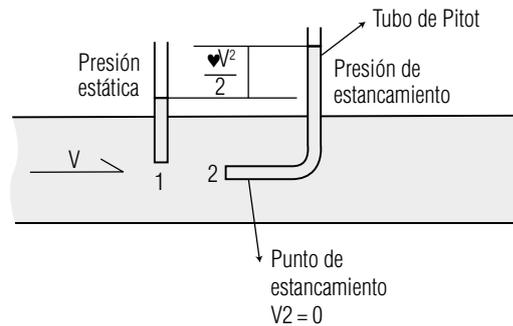


Figura 68. Tubo de Pitot.

Se utiliza la ecuación de Bernoulli para solucionar este problema clásico. Considérese que los puntos 1 y 2 son puntos muy cercanos, por lo cual se garantiza que la presión estática entre los dos puntos es prácticamente igual. La velocidad en el punto 1 corresponde a la velocidad del fluido aguas arriba y la velocidad en el punto 2 es cero, dado que en allí se tiene un *punto de estancamiento*. Este fenómeno sucede debido al tapón hidráulico que impone la columna de líquido que se encuentra en el piezómetro acodado, denominado tubo de Pitot. La presión de este tapón hidráulico corresponde a la presión de estancamiento, que será entonces la presión en el punto 2.

En el punto 1 y en el punto 2 se plantean sendas ecuaciones de Bernoulli, que se igualan, dado que ambas son iguales a una misma constante. Considere también que los puntos 1 y 2 están a la misma altura (conducto horizontal):

$$\begin{aligned}
 P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g z_1 &= P_2 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g z_2 \\
 P_1 + \frac{\rho V_1^2}{2} &= P_{est} \\
 V_1 &= \sqrt{\frac{2(P_{est} - P_1)}{\rho}}
 \end{aligned}
 \tag{163}$$

Nótese que la diferencia de alturas de las columnas de líquido correspondientes a los piezómetros que miden las presiones estáticas y de estancamiento representa una presión hidrostática correspondiente a la presión dinámica que tiene el fluido antes de llegar al punto de estancamiento. Es por ello que una de las principales aplicaciones del tubo de Pitot consiste en ser un instrumento para medir velocidades de líneas de corriente en un flujo.

La suma de la presión estática y la dinámica se denomina *presión de estancamiento* (la que se obtendría con un tubo de Pitot en el denominado punto de estancamiento).

El tubo de Pitot, como instrumento de medición, no es tan práctico. Una variación constructiva, pero que sigue el mismo principio, se denomina tubo de Prandtl, atribuida a los trabajos del físico alemán Ludwig Prandtl (1875-1953).

Dicha variante agrupa en un solo montaje tanto el piezómetro para medir presión estática como el tubo de Pitot acodado, y con un manómetro diferencial se mide la diferencia entre la presión estática y la presión de estancamiento, es decir, la presión dinámica.



Figura 69. Ludwig Prandtl.
Fuente: Wikipedia. Licencia Wikicommons (bit.ly/3hHcGrU)

En la figura 70 se muestran diversos tubos de Pitot con los cuales cuenta el Laboratorio de Desarrollo Tecnológico de la Universidad Central.

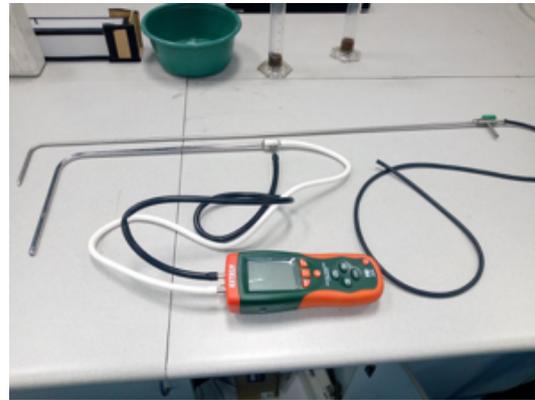


Figura 70. Tubos de Pitot del Laboratorio de Desarrollo Tecnológico de la Universidad Central.

En la figura 71 se muestra un detalle de la principal característica del denominado tubo de Prandtl.

Aunque en la práctica se habla de utilización de tubos o sondas de Pitot, es claro que lo que se utiliza mayormente en la práctica son tubos de Prandtl, pero se conocen como sondas o tubos de

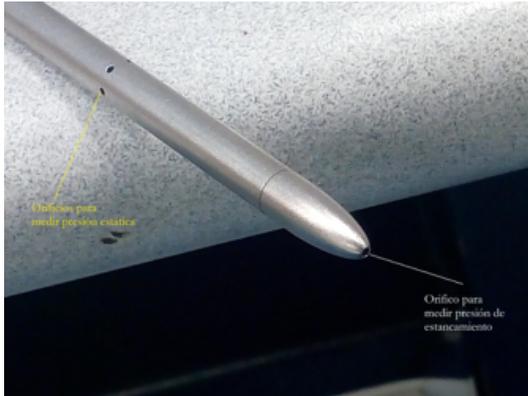


Figura 71. Detalle de tubos de Prandtl (Pitot).

Pitot. La operación de medición de velocidades utilizando este instrumento se denomina **pitometría**.

Otra utilización de los denominados tubos de Pitot se da en la aeronáutica. Dentro de la instrumentación de las aeronaves, hay una sonda de Pitot que se encarga de medir la velocidad relativa del avión con respecto al viento. Por medios electrónicos se toman las lecturas de las presiones diferenciales y se llevan a una escala de velocidades que presenta en un *display* el dato a los pilotos.

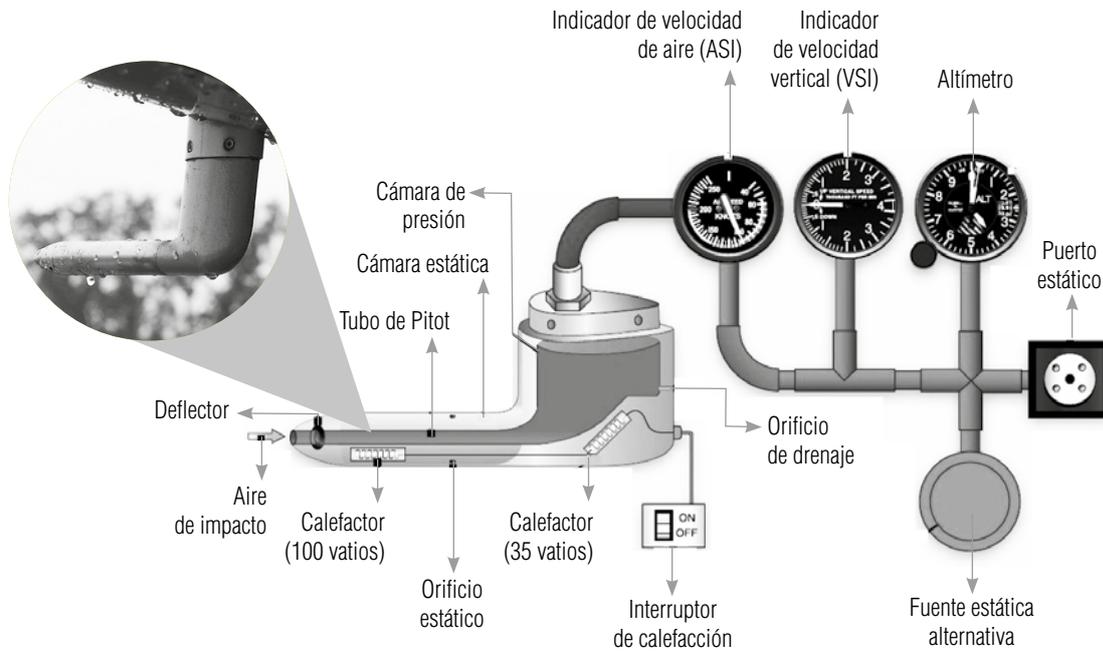


Figura 72. Sondas Pitot de aplicación aeronáutica.

Fuente: elaboración propia con base en Geyer (2016, bit.ly/2DnyJEW).

Una interpretación adicional de los términos de la ecuación de Bernoulli en términos de presiones es la siguiente:

- La presión estática representa la presión termodinámica real del fluido. Es la presión que se mediría con un manómetro.
- La presión dinámica representa el aumento de presión del fluido cuando se detiene de manera isoentrópica.
- La presión hidrostática no es una presión en sentido real, ya que dependerá del nivel de referencia seleccionado.

Ecuación de Bernoulli en términos de alturas (cabezas o distancias)

Dividamos la ecuación de Bernoulli (155) entre la gravedad, de lo cual se obtiene:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = cte \quad (164)$$

Analicemos nuevamente sus términos uno a uno:

$$\frac{P}{\rho g} = \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2}} = \frac{\frac{N}{m^2}}{\frac{N}{m^3}} = m \quad (165)$$

El término $\frac{P}{\rho g}$ se denomina **altura, cabeza o carga de presión**.

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{\frac{m^2}{s^2}}{\frac{m}{s^2}} = m \quad (166)$$

El término $\frac{V^2}{2g}$ se denomina **altura, cabeza o carga de velocidad**.

$$z = m$$

Este término z tiene unidades de distancia (m) y se denomina **altura, cabeza o carga de elevación**.

Una expresión alterna que sintetiza la ecuación de Bernoulli es la siguiente:

La suma de las cabezas de presión, de velocidad y de elevación a lo largo de una línea de corriente es constante en el transcurso de un flujo estacionario cuando los efectos de la compresibilidad y de la viscosidad son despreciables.

Si se ubican piezómetros y tubos de Pitot a lo largo de una línea hidráulica, se tendrá una variación en las presiones estática y de estancamiento a lo largo de ella. Uniendo todas las diferentes alturas dadas por los piezómetros se obtienen unas líneas denominadas **líneas de alturas piezométricas**. La línea que une las alturas de los tubos de Pitot se denomina **línea de altura total o línea de energía (LE)**. Esta línea se mantiene horizontal según la ecuación de Bernoulli y representa la energía hidráulica que tiene el fluido. La línea que une los piezómetros se denomina **línea de gradiente hidráulico (LGH)**. La línea que une las elevaciones de los puntos donde están ubicados los piezómetros se denomina **línea de elevación**. Obsérvese que la diferencia de alturas entre la LE y la LGH representa la cabeza de velocidad, y la diferencia entre la LGH y la línea de elevación representa la cabeza de presión (figura 73).

En el caso de la ecuación de Bernoulli, la línea de energía permanece horizontal, dado que se considera que la energía permanece constante a lo largo de la línea de corriente.

También debe tenerse presente que la altura de elevación se establece a partir de un nivel de referencia, que puede ser arbitrario. Por ello, este componente de energía puede ser relativo, e incluso hacerse cero, si la línea de elevación coincide con el nivel de referencia. Esto será beneficioso en la resolución de problemas de hidrodinámica.

Por último, debe tenerse presente, en virtud de las deducciones anteriores, que la ecuación de Bernoulli aplica bajo las siguientes condiciones:

1. Flujo estacionario.
2. Flujo sin fricción (viscosidad).
3. Flujo incompresible.

4. Ningún trabajo mecánico se adiciona (bomba) o se retira (turbina) del fluido.
5. No hay transferencia de calor.
6. Se aplica a lo largo de una misma línea de corriente.

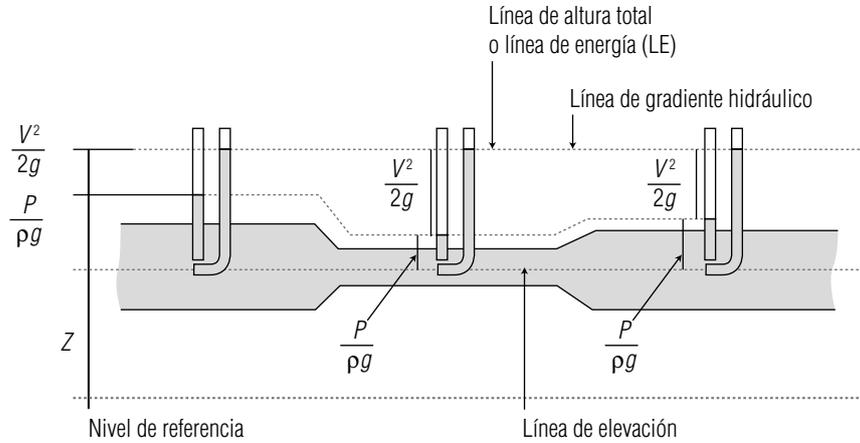


Figura 73. Líneas piezométricas.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 193).

Ecuación de la energía

Para entender la filosofía de la ecuación de la energía, utilicemos el concepto de la línea de alturas totales:

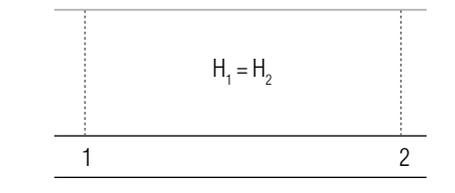


Figura 74. Representación geométrica de la ecuación de Bernoulli en términos de líneas energéticas.

Recordemos que la altura total es una representación del estado energético del fluido. Entre mayor sea dicha altura, se considera que el fluido posee mayor energía.

En el caso de la ecuación de Bernoulli, se supone que el fluido conserva su energía entre sus dos puntos; por lo tanto, se cumple:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \quad (167)$$

A partir de la ecuación de Bernoulli, deduzcamos la ecuación de la energía realizando un **balance energético**.

Introduzcamos dentro de la línea un elemento que le adicione energía al fluido (bomba), lo cual se traduce en un aumento en la altura total del fluido dado por la altura o cabeza de la bomba HB (figura 75).

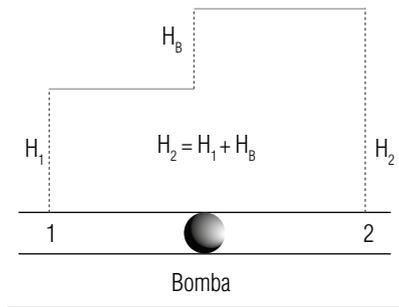


Figura 75. Representación geométrica de la cabeza de bombeo.

Haciendo el balance con respecto a la altura total se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + H_B = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \quad (168)$$

Ahora introduzcamos un elemento que sustrae energía de la línea (turbina) y disminuye la altura total del fluido en una cantidad dada por H_T que será la *cabeza de la turbina* (figura 76).

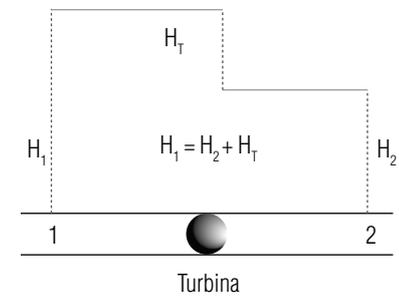


Figura 76. Representación geométrica de la cabeza de turbina.

Haciendo el balance con respecto a la altura total se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + H_T \quad (169)$$

Ahora, con la misma filosofía de **balance energético**, tomemos en cuenta las pérdidas por fricción fluida que pueden existir en la línea:

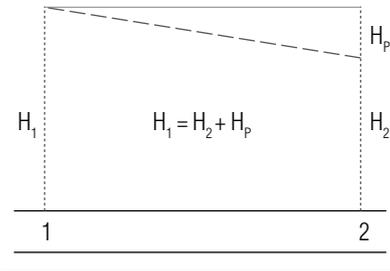


Figura 77. Representación geométrica de la cabeza de pérdidas.

La altura total del fluido se verá reducida entre los puntos 1 y 2; una cantidad denominada H_p . Esta altura representará la energía disipada por la fricción fluida (viscosidad).

Haciendo el balance con respecto a la altura total se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + H_p \quad (170)$$

Ahora combinemos todos los casos anteriores también con la misma filosofía de balance energético.

Haciendo el balance con respecto a la altura total se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + H_B - H_{p1} \\ = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + H_T + H_{p2} + H_{p3} \end{aligned} \quad (171)$$

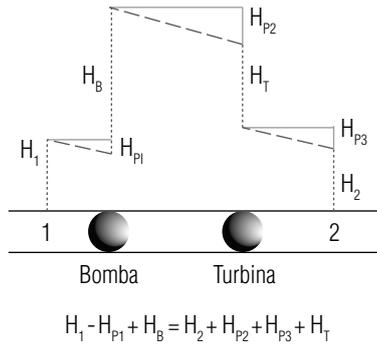


Figura 78. Suma geométrica de cabezas en una línea de bombeo con una turbina aguas abajo.

Agrupemos todas las pérdidas en un solo término positivo al lado derecho de la ecuación, que llamaremos H_{PT} :

$$\begin{aligned}
 & \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + H_B \\
 &= \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + H_T + H_{p1} + H_{p2} + H_{p3} \\
 & \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + H_B \\
 &= \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + H_T + H_{PT}
 \end{aligned} \tag{172}$$

Hagamos uso del análisis dimensional. Multipliquemos la ecuación por la gravedad para obtener unidades de energía por unidad de masa:

$$\begin{aligned}
 & \frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gZ_1 + gH_B \\
 &= \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gZ_2 + gH_T + gH_{PT}
 \end{aligned} \tag{173}$$

Ahora multipliquemos por el flujo másico para obtener unidades de energía por unidad de tiempo (potencia):

$$\begin{aligned}
 & \dot{m} \left(\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gZ_1 \right) + \dot{m}gH_B \\
 &= \dot{m} \left(\frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gZ_2 \right) + \dot{m}gH_T + \dot{m}gH_{PT} \\
 & \dot{m} \left(\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gZ_1 \right) + \dot{W}_B \\
 &= \dot{m} \left(\frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gZ_2 \right) + \dot{W}_T + \dot{W}_{PT}
 \end{aligned} \tag{174}$$

¡Esta es la denominada ecuación de la energía!

Finalmente, revisemos entonces las características y condiciones de aplicación de la **ecuación de la energía**.

- A diferencia de la ecuación de Bernoulli, que es una ecuación de **conservación**, la ecuación de la energía es una ecuación de **balance**. Por **conservación** se entenderá, en este curso, la situación en donde se evalúa el estado energético del fluido sin alterar o perturbar el sistema. El término **balance** hará alusión al análisis del estado energético del fluido, evaluando las perturbaciones energéticas introducidas a la línea; es decir, teniendo en cuenta lo que se adiciona, lo que se retira o pierde y lo que queda.
- La ecuación de la energía es más general que la ecuación de Bernoulli. Será, entonces, una ecuación de la cual habrá que hacer uso cuando, entre otras situaciones, se pretenda calcular o seleccionar dispositivos como bombas o turbinas para establecer condiciones determinadas en un circuito hidráulico.
- El término de **pérdidas energéticas** se evalúa normalmente a partir de trabajo experimental, el cual ha sido ampliamente desarrollado, y al que se tiene acceso a través de manuales, tablas y nomogramas. Como punto de partida se tienen los trabajos de Reynolds, Hagen-Poiseuille, Chezy, Hazen-Williams y Moody, que serán la base del siguiente tema.

Ejercicio resuelto¹⁷

Kerosene a 20°C ($\rho = 804 \text{ kg/m}^3$) fluye a través de una bomba a 2.3 ft³/s. La cabeza de pérdidas entre el punto 1 y el punto 2 es de 8 pies y la bomba entrega 8 hp al fluido. ¿Cuál debe ser la lectura h del manómetro de mercurio?

$$\gamma_{\text{Hg}} = 13600 \text{ kg/m}^3.$$

Solución

Este es un bonito problema que puede ilustrar una situación en la cual es más conveniente trabajar con el sistema inglés. Es muy común que el estudiante prefiera trabajar en SI, pero convertir todos los datos a este sistema conlleva frecuentemente a errores. No obstante, el sistema internacional sí será útil para utilizar el concepto de gravedad específica y aplicarlo en la solución para ahorrar operaciones.

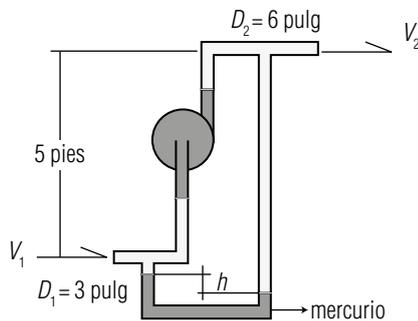


Figura 79.

Fuente: elaboración propia con base en White (2003, p. 264).

Primero, del dato de densidad del kerosene se tiene que la gravedad específica de este es de 0.804 (bastante fácil a partir del SI). La gravedad específica del mercurio es de 13.6. Se debe tener presente que $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 62.4 \text{ lbm/ft}^3$.

El peso específico del agua, que se necesitará dentro de los cálculos, es de $\gamma_{\text{H}_2\text{O}} = 62.4 \text{ lbf/ft}^3$ (bastante fácil a partir del sistema inglés). En conclusión, ambos sistemas presentan facilidades interesantes, razón por la cual no es lógico pensar en prescindir absolutamente de alguno de ellos.

Se calculan las velocidades a la entrada y a la salida de la bomba:

17 Tomado de White (2003, problema 3146).

$$V_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{2.3 \frac{ft^3}{s}}{\frac{\pi(1/4 ft)^2}{4}} = 46.85 \frac{ft}{s}$$

$$V_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = \frac{2.3 \frac{ft^3}{s}}{\frac{\pi(1/2 ft)^2}{4}} = 11.71 \frac{ft}{s}$$
(175)

Se plantea ahora la ecuación de la energía a la entrada (punto 1) y a la salida de la bomba. Se planteará en términos de alturas (cabezas):

$$\frac{P_1}{\gamma_{kers}} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_b = \frac{P_2}{\gamma_{kers}} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{perd}$$
(176)

La cabeza de bombeo puede encontrarse sabiendo que la potencia de bombeo se obtiene a partir de:

$$\dot{W}_b = \rho g \dot{V} h_b$$
(177)

Entonces, la cabeza de bombeo es de:

$$h_b = \frac{\dot{W}_b}{\rho g \dot{V}} = \frac{8hp \cdot \frac{550 \text{ lbf} \cdot \text{ft}}{\text{s}}}{62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3} \cdot 2.3 \frac{\text{ft}^3}{\text{s}}} = 30.66 \text{ ft}$$
(178)

Deliberadamente, se ubicará el nivel de referencia en el punto 1, con lo cual $Z_1 = 0$. Así pues, el punto 2 se ubica a 5 ft por encima del punto 1, por lo tanto, $Z_2 = 5 \text{ ft}$. V_1 y V_2 también ya se han calculado y por datos del problema, las pérdidas $h_{perd} = 8 \text{ ft}$.

Cuando se soluciona un problema, hay que visualizar una estrategia que conduzca a su solución. Es claro que se tiene un manómetro de mercurio diferencial, que mide la diferencia entre la presión de salida y la presión de entrada de la bomba. Por lo tanto, suena lógico pensar que es necesario, de alguna forma, obtener una expresión para dicha diferencia de presiones. Del planteamiento de la ecuación de la energía se puede obtener lo siguiente:

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma_{kers}} = h_b + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} - Z_2 - h_{perd}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma_{kers}} = 30.66 \text{ ft} + \frac{(46.65 \text{ ft/s})^2 - (11.71 \text{ ft/s})^2}{2 * 32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}} - 5 \text{ ft} - 8 \text{ ft} \quad (179)$$

$$\frac{P_2 - P_1}{\gamma_{kers}} = 4.66 \text{ ft}$$

Ahora se soluciona el manómetro diferencial:

$$P_1 + \gamma_{hg} h - \gamma_{kers} h - \gamma_{kers} 5 \text{ ft} = P_2 \quad (180)$$

A partir de la ecuación anterior, se encuentra otra expresión para la diferencia de presiones:

$$P_2 - P_1 = h(\gamma_{hg} - \gamma_{kers}) - 5 \text{ ft} * \gamma_{kers} \quad (181)$$

Despejando la altura h , que es la incógnita del problema:

$$h = \frac{P_2 - P_1 + 5 \text{ ft} * \gamma_{kers}}{(\gamma_{Hg} - \gamma_{kers})} \quad (182)$$

Aplicando el concepto de gravedad específica:

$$h = \frac{P_2 - P_1 + 5 \text{ ft} * 0.804 * \gamma_{H_2O}}{\gamma_{H_2O} (13.6 - 0.804)} \quad (183)$$

El valor de $P_2 - P_1$ se obtiene de la ecuación de la energía:

$$P_2 - P_1 = 4.66 \text{ ft} * \gamma_{kers} = 4.66 \text{ ft} * 0.804 * \gamma_{kers}$$

$$P_2 - P_1 = 4.66 \text{ ft} * 0.804 * 62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} = 233.8 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2} \quad (184)$$

Reemplazando este valor en la expresión para h y asignando los demás valores:

$$h = \frac{233.8 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^2} + 5 \text{ ft} * 0.804 * 62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}}{62.4 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} (13.6 - 0.804)} \quad (185)$$

$$h = 0.607 \text{ f}$$

Conservación de la cantidad de movimiento

Desde la enseñanza secundaria se han conocido y aplicado las denominadas *leyes del movimiento de Newton*, atribuidas a Sir Isaac Newton (1643-1727).

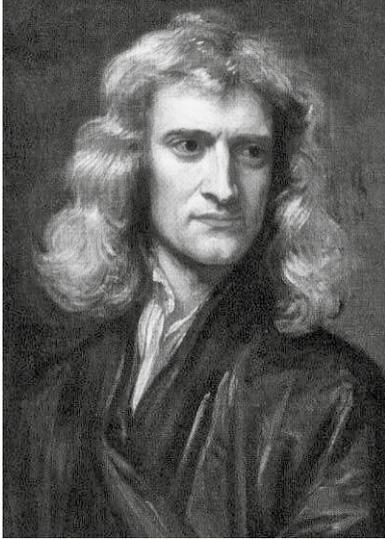


Figura 80. Isaac Newton.

Fuente: Wikipedia. Licencia WikiCommons (bit.ly/2P7svM7).

En particular, la segunda ley de Newton se expresa matemáticamente así:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (186)$$

Donde \vec{F} es la fuerza resultante sobre un cuerpo, m es su masa y \vec{a} es la aceleración que experimenta ese cuerpo debido a la aplicación de la fuerza. Nótese que esta es una ecuación vectorial. La fuerza es un vector; sus efectos dependen de su magnitud, la dirección en que se aplica y la inclinación de su línea de acción con respecto a alguna referencia fijada. A su vez, el carácter vectorial de la fuerza se establece en la segunda ley de Newton a través del carácter vectorial de la aceleración del cuerpo.

La cinemática de partícula establece que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (187)$$

Donde \vec{v} es la velocidad y t es el tiempo.

Reemplazando este resultado en la segunda ley, se tiene:

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} \quad (188)$$

A la cantidad $m\vec{v}$ (vectorial) se le denominará cantidad de movimiento lineal o *momentum* lineal.

La segunda ley de Newton se puede expresar, entonces, así:

La fuerza resultante sobre una partícula es proporcional a la variación con respecto al tiempo de su cantidad de movimiento lineal.

Antes de continuar, se debe tener presente lo siguiente: para efectos de obtener expresiones de las diferentes ecuaciones de conservación, se ha acudido a modelos simples o representaciones geométricas que faciliten la interpretación sin acudir a modelos muy elaborados matemáticamente hablando. Sin embargo, existe un teorema fundamental de la mecánica de fluidos que se conoce como el **teorema de transporte de Reynolds**, y todas las ecuaciones de conservación podrían deducirse a través de la aplicación de dicho teorema. Para el caso de la ecuación de conservación del *momentum* lineal, se hará uso de esta herramienta con el fin, principalmente, de que el estudiante conozca la existencia y aplicación de esta importante formulación, dejando claro que las demás ecuaciones de conservación pueden deducirse a partir de su aplicación. Se invita al estudiante a consultar estas deducciones.

Se enuncia, entonces, el teorema de transporte de Reynolds:

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{C\forall} \eta \rho d\forall + \int_{CS} \eta \rho \vec{V} \cdot dA \quad (189)$$

Analicemos cada uno de sus términos:

N representa una propiedad en general, como la masa o la energía. El término $\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{sistema}}$ representa entonces la variación neta de propiedad en el sistema analizado con respecto al tiempo.

η representa la propiedad analizada, por unidad de masa, es decir: $\eta = \frac{N}{m}$. Al tener $\eta \rho$, se obtendría la cantidad de propiedad por unidad de volumen, es decir: $\eta \rho = \frac{N}{\forall}$. Así pues, el término integral $\int_{C\forall} \eta \rho d\forall$ representaría la cantidad total de propiedad en el volumen de control ($C\forall$) y el término $\frac{\partial}{\partial t} \int_{C\forall} \eta \rho d\forall$ sería la variación en el tiempo de esa propiedad en el volumen de control.

$\vec{V} \cdot dA$ es un término de flujo (caudal) que pasa por el sistema analizado. $\eta \rho \vec{V} \cdot dA$ sería entonces el flujo de la propiedad y $\int_{CS} \eta \rho \vec{V} \cdot dA$ sería el flujo neto de propiedad a través de la superficie de control CS , es decir, la superficie que rodea el volumen de control.

Analicemos, entonces, la variación de una nueva propiedad (cantidad de movimiento) en un volumen de control. Para ello, $N = m\vec{V}$, por lo tanto, $\eta = \vec{V}$. Reemplazando en la expresión para el teorema de transporte de Reynolds se tiene:

$$\left. \frac{dm\vec{V}}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{C\forall} \rho \vec{V} d\forall + \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot dA \quad (190)$$

Como en todas las ecuaciones de conservación, se impondrán condiciones bajo las cuales las expresiones deducidas se consideran válidas. Para el caso de un flujo estacionario, el primer término del lado derecho, que se denomina *término de acumulación*, es nulo. Adicionalmente, se tiene que

$$\left. \frac{dm\vec{V}}{dt} \right|_{\text{sistema}} = \sum \vec{F} \Big|_{\text{sist}}. \text{ Así pues:}$$

$$\sum \vec{F} \Big|_{\text{sist}} = \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot dA \quad (191)$$

El término del lado derecho se conoce como término de *momentum*. Normalmente en los problemas prácticos los volúmenes de control tienen entradas y salidas bien definidas. A partir de lo anterior se puede calcular el flujo neto de *momentum* lineal como:

$$\begin{aligned} \int_{CS} \vec{V} \rho \vec{V} \cdot dA &= \sum_{CS} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot A) \\ &= \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_o - \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_i \end{aligned} \quad (192)$$

Finalmente se tiene:

$$\sum \vec{F} \Big|_{\text{sist}} = \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_o - \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_i \quad (193)$$

La anterior es la denominada **ecuación de conservación de la cantidad de movimiento**. En palabras se podría expresar así:

La fuerza resultante que actúa sobre un volumen de control definido es igual al flujo neto de *momentum* lineal que cruza a través de él.

Analicemos un poco las unidades del término $\dot{m} \vec{V}$.

$$\frac{kg}{s} * \frac{m}{s} = \frac{kg * m}{s^2} \quad (194)$$

Observemos que la combinación de unidades del flujo de *momentum* corresponde a unidades de fuerza.

La metodología que se va a ilustrar a continuación corresponde a la propuesta por Crowe (2001). Se ilustrará a partir de ejercicios desarrollados sobre los casos más clásicos de aplicación de la ecuación de conservación del *momentum* lineal.

Ejercicio resuelto¹⁸

Un chorro de agua de 2 pulgadas de diámetro y con una velocidad de 50 ft/s está llenando un tanque. El tanque tiene una masa de 25 lbm y contiene 5 gal de agua a 70°F. Encuentre el mínimo coeficiente de fricción tal que la fuerza que actúa sobre el bloque de contacto sea cero.

Solución

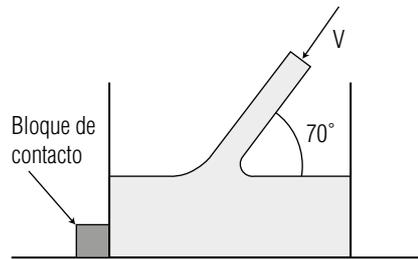


Figura 81.

Fuente: elaboración propia con base en Crowe (2001, p. 250).

El método que se utilizará, propuesto por Crowe (2001), consiste en definir un volumen de control y, a partir de este, establecer dos diagramas: uno que llamaremos diagrama de cuerpo libre (DCL) y uno que llamaremos diagrama de flujo de *momentum* (DM). En la figura 82 se muestran ambos diagramas para el caso del problema propuesto.

Nótese que en el DCL se ubican solamente las fuerzas, y en el DM se ubican los vectores de flujo de *momentum* $\dot{m}\vec{V}$.

A continuación se realiza una sumatoria de fuerzas en el diagrama de cuerpo libre a lo largo del eje x y una sumatoria de fuerzas a lo largo del eje y .

¹⁸ Tomado de Crowe (2001, p. 250, ejercicio resuelto 6-4).

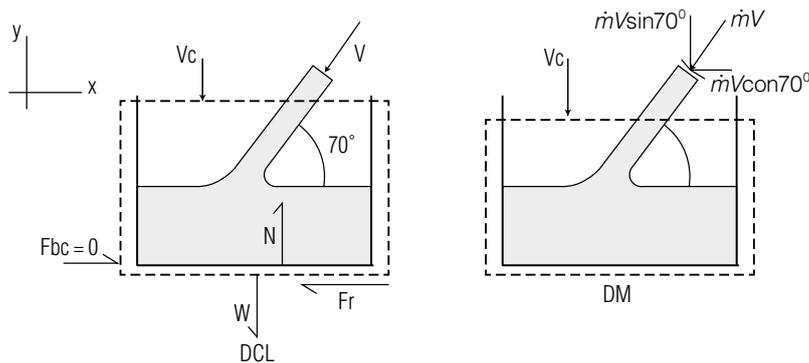


Figura 82.

$$\sum F_x = F_{bc} - F_r \quad (195)$$

La fuerza del bloque de contacto (F_{bc}) es nula; de todas formas la escribiremos en el planteamiento para seguir la secuencia. Para la fuerza de rozamiento (F_r) se escoge la dirección de forma algo arbitraria, pero después se mostrará cómo se puede comprobar la validez de esta escogencia.

Para el eje y se tiene:

$$\sum F_y = N - W \quad (196)$$

Obsérvese que no se están igualando las ecuaciones a ninguna cantidad, simplemente se está realizando su suma vectorial en una dirección.

Ahora se trabaja con el término de flujo de *momentum* $\sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_o - \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_i$. Se considera *momentum* de salida lo que va hacia afuera del volumen de control, y *momentum* de entrada lo que se dirige hacia adentro del volumen de control. Es claro que, para efectos del problema, no existen flujos de salida; todos son de entrada. La ecuación de flujo de *momentum* puede expresarse también en términos de sus componentes x :

$$\sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_{ox} - \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_{ix} \quad (197)$$

Y en sus componentes en y :

$$\sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_{oy} - \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_{iy} \quad (198)$$

Para el caso del problema, el flujo de *momentum* a lo largo del eje x es:

$$-(-\dot{m} V \cos 70^\circ) \quad (199)$$

Para el caso del problema el flujo de *momentum* a lo largo del eje y es

$$-(-\dot{m}V \sin 70^\circ) \quad (200)$$

A continuación se igualan una a una las sumas en x y en y de los correspondientes diagramas:

$$\begin{aligned} F_{bc} - F_r &= -(-\dot{m}V \cos 70^\circ) \\ N - W &= -(-\dot{m}V \sin 70^\circ) \end{aligned} \quad (201)$$

Nótese que se tienen dos ecuaciones; por lo tanto, solo se pueden tener dos incógnitas en este tipo de problemas.

Operando un poco más se tiene

$$\begin{aligned} -F_r &= \dot{m}V \cos 70^\circ \\ N - W &= \dot{m}V \sin 70^\circ \end{aligned} \quad (202)$$

Un primer término importante de obtener es el producto $\dot{m}V$. Es importante en este punto indicar que este término de flujo de *momentum* tiene las siguientes expresiones equivalentes:

$$\dot{m}V = \rho VAV = \rho AV^2 = \rho \dot{V}V \quad (203)$$

Algo importante de indicar es que otros autores pueden expresar la ecuación de conservación del *momentum* lineal utilizando cualquiera de estas expresiones.

Para el caso del presente ejercicio utilizaremos ρAV^2 . Así pues:

$$\rho AV^2 = 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} * \frac{\pi * \left(\frac{2}{12} \text{ft}\right)^2}{4} * \left(50 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2 = 105.81 \text{ lbf} \quad (204)$$

De la primera ecuación se obtiene:

$$F_r = -105.81 \text{ lbf} * \cos 70^\circ = -36.19 \text{ lbf} \quad (205)$$

El signo menos en el resultado tiene la siguiente interpretación: el sentido en que se asumió la fuerza de rozamiento (F_r) es contrario al que realmente tiene en el modelo físico. Esta situación es aplicable a la solución de cualquier problema de este tipo y deberá tenerse en cuenta. Pero, más allá de

esta interpretación inicial, se invita al lector a comprobar que el sentido inicialmente supuesto para esta fuerza no corresponde con la realidad física del problema. Por favor compruebe esto en el DCL.

Calculemos el peso del agua que se deposita en el instante dado y el peso del tanque:

$$\begin{aligned}
 W &= W_{\text{tanque}} + W_{\text{agua}} \\
 W &= 25\text{ lbf} + 1.94 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} * \frac{32.2\text{ lbm}}{1 \text{ slug}} * g * 5 \text{ USgal} * \frac{0.1337 \text{ ft}^3}{\text{USgal}} \\
 W &= 66.76 \text{ lbf}
 \end{aligned}
 \tag{206}$$

Se involucra ahora el coeficiente de fricción estático:

$$\begin{aligned}
 N - W &= \frac{F_r}{\mu_e} - W = \dot{m}V \sin 70^\circ \\
 \frac{F_r}{\mu_e} &= \dot{m}V \sin 70^\circ + W \\
 \mu_e &= \frac{36.19\text{ lbf}}{105.81\text{ lbf} \sin 70^\circ + 66.76\text{ lbf}} \\
 \mu_e &= 0.2178
 \end{aligned}
 \tag{207}$$

Álabes

Los álabes son superficies cuya función es cambiar la dirección del flujo de un fluido y, por ende, inducir un cambio en el *momentum* lineal. Este cambio se evalúa normalmente desde el punto de vista del cambio de dirección y también, en algunos casos, desde el punto de vista del cambio en la magnitud de la velocidad.

El análisis de este sencillo dispositivo es básico para diversas aplicaciones de ingeniería, como las turbomáquinas, que involucran las bombas centrífugas, turbinas y compresores.

Problema¹⁹

Determine las reacciones externas en las direcciones x y y necesarias para mantener fijo el álabe, el cual voltea el chorro de aceite en el plano horizontal. Sean $V_1 = 28 \text{ m/s}$, $V_2 = 27 \text{ m/s}$ y $Q = 0.20 \text{ m}^3/\text{s}$.

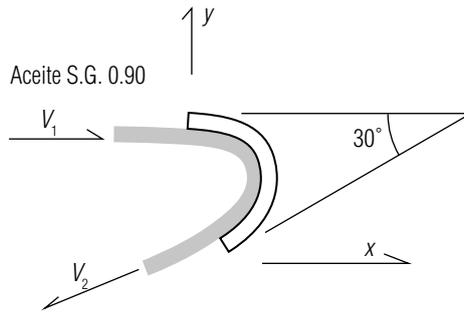


Figura 83.

Solución

Seguiremos el método propuesto en el ejercicio anterior. Por tanto, definiremos el volumen de control y elaboramos el DCL y el DM.

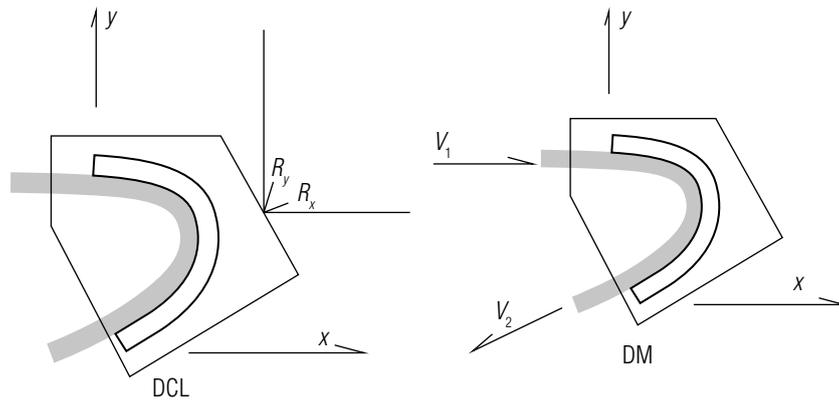


Figura 84.

Hacemos sumatoria de fuerzas a lo largo de la dirección x y y en el DCL:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= -R_x \\ \sum F_y &= -R_y \end{aligned} \quad (208)$$

Encontramos el flujo neto de *momentum* en las direcciones x y y del DM:

$$\begin{aligned} \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_{ox} - \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_{ix} &= -\dot{m} V_2 \cos 30^\circ - \dot{m} V_1 \\ \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_{oy} - \sum_{CS} \dot{m} \vec{V}_{iy} &= -\dot{m} V_2 \sin 30^\circ - 0 \end{aligned} \quad (209)$$

Igualamos lo obtenido en la dirección x del DCL con lo obtenido en x en el DM y análogo para la dirección y :

$$\begin{aligned} -R_x &= -\dot{m}V_2 \cos 30^\circ - \dot{m}V_1 \\ -R_y &= -\dot{m}V_2 \sin 30^\circ \end{aligned} \quad (210)$$

De nuevo el término $\dot{m}V$ es importante y se calculará de una vez:

$$\begin{aligned} \dot{m}V_1 &= \rho QV = 0.9 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.20 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5040 \text{N} \\ \dot{m}V_2 &= \rho QV = 0.9 \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.20 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot 27 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4860 \text{N} \\ -R_x &= -4860 \text{N} \cdot \cos 30^\circ - 5040 \text{N} \\ R_x &= 9249 \text{N} \\ -R_y &= -4860 \text{N} \sin 30^\circ \\ R_y &= 2430 \text{N} \end{aligned} \quad (211)$$

Accesorios de tubería

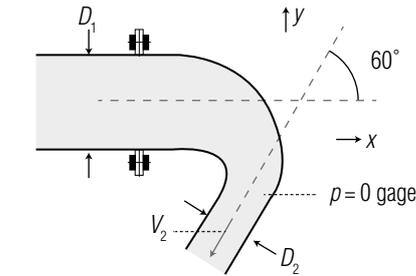
En los sistemas de tuberías, los tubos se conectan para formar el circuito por medio de diferentes accesorios; tes “T”, codos y reducciones son fijadas por medio de adhesivos, tornillos o soldaduras. En los cálculos de diseño de estas uniones, es importante conocer las fuerzas que ellas experimentan; normalmente, dichas fuerzas aparecen como resultado del cambio de *momentum* que el accesorio provoca en el flujo.

Problema resuelto²⁰

El codo descarga agua a la atmósfera. Determine las componentes de la fuerza en la brida del codo para que este permanezca en su lugar. El codo se encuentra en un plano horizontal. Asuma que las fuerzas viscosas son despreciables. El volumen interior del codo es de 0.25 m^3 , $D_1 = 60 \text{ cm}$, $D_2 = 30 \text{ cm}$, y $V_2 = 10 \text{ m/s}$. La masa del material del codo es de 250 kg .

Figura 85.

Fuente: elaboración propia con base en Crowe (2001, p. 256).



Solución

Se elaboran los diagramas de cuerpo libre y de *momentum*.

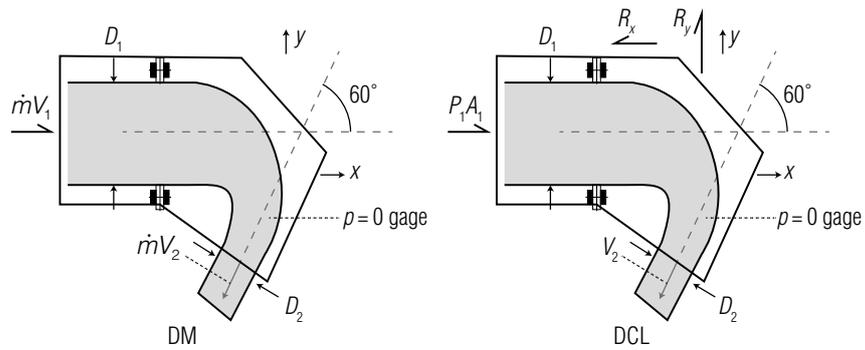


Figura 86. Diagramas de cuerpo libre y de *momentum*.
Fuente: elaboración propia con base en Crowe (2001, p. 256).

La presión en el punto 1 puede obtenerse con la aplicación de la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 \quad (212)$$

Para conocer la velocidad en 1 se aplica la ecuación de continuidad:

$$V_1 A_1 = V_2 A_2$$

$$V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = V_2 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 = 10 \text{ m/s} \left(\frac{30 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} \right)^2 = 2.5 \text{ m/s} \quad (213)$$

Despejando la P_1 y teniendo presente que los términos de elevación Z se anulan, pues se encuentra en un plano horizontal y al mismo nivel, se tiene:

$$P_1 = \gamma \frac{(V_2^2 - V_1^2)}{2g} = 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} * \frac{(10 \text{ m/s})^2 - (2.5 \text{ m/s})^2}{2 * 9.8 \text{ m/s}^2} = 4683 \text{ Pa} \quad (214)$$

Hallando el término de flujo de *momentum*:

$$\begin{aligned}\dot{m}V_2 &= \rho AV_2^2 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * \frac{\pi(0.3\text{m})^2}{4} * (10\text{m/s})^2 = 7069\text{N} \\ \dot{m}V_1 &= \rho AV_1^2 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * \frac{\pi(0.6\text{m})^2}{4} * (2.5\text{m/s})^2 = 1767\text{N}\end{aligned}\quad (215)$$

Haciendo la sumatoria de fuerzas en *x*:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= P_1A_1 - R_x \\ \sum F_y &= R_y\end{aligned}\quad (216)$$

Haciendo el balance de flujo de *momentum*:

$$\begin{aligned}\sum_{CS} \dot{m}\vec{V}_{ox} - \sum_{CS} \dot{m}\vec{V}_{ix} &= -\dot{m}V_2 \cos 60^\circ - \dot{m}V_1 \\ \sum_{CS} \dot{m}\vec{V}_{oy} - \sum_{CS} \dot{m}\vec{V}_{iy} &= -\dot{m}V_2 \sin 60^\circ - 0\end{aligned}\quad (217)$$

Igualando en *x* y en *y*:

$$\begin{aligned}P_1A_1 - R_x &= -\dot{m}V_2 \cos 60^\circ - \dot{m}V_1 \\ R_y &= -\dot{m}V_2 \sin 60^\circ\end{aligned}\quad (218)$$

Ingresando valores:

$$\begin{aligned}R_x &= P_1A_1 + \dot{m}V_2 \cos 60^\circ + \dot{m}V_1 \\ &= 4683 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} * \frac{\pi(0.6\text{m})^2}{4} + 7069\text{N} \cos 60^\circ + 1767\text{N} \\ R_x &= 6626\text{N} \\ R_y &= -7069\text{N} \sin 60^\circ = -6122\text{N}\end{aligned}\quad (219)$$

La reacción en *y* tiene un sentido contrario al asumido.

En el plano vertical, las fuerzas que se aplican son solamente el peso del codo y del líquido que se tiene en su interior.

$$R_z = W_{\text{codo}} + W_{\text{liquido}} = \left(250\text{kg} * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) + \left(0.25\text{m}^3 * 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right) = 4902\text{ N} \quad (220)$$

Nótese que las fuerzas correspondientes a los pesos propios del elemento y del líquido son inferiores a las fuerzas atribuibles al cambio en la cantidad de movimiento. Los efectos de cambio en la cantidad de movimiento son más críticos a la hora de calcular esta brida de tubería.

Pérdidas hidráulicas

Pérdidas en tuberías

El flujo de fluidos a través de ductos o tuberías es una situación común en la práctica de ingeniería (sistemas de calefacción, distribución de agua, bombeo de crudos, etc.). Este fluido se obliga a circular mediante un sistema de bombeo y es de vital importancia conocer la fricción, que se relaciona con la pérdida de presión o de carga (energía) a través de la tubería. Visto desde otro punto de vista, es necesario estimar la pérdida de presión en la tubería para determinar la potencia de bombeo. Recordemos que esta relación ya fue establecida por medio de la ecuación de la energía:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + H_B = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + H_T + H_{pT} \quad (221)$$

El problema consiste ahora en estimar esta pérdida de carga que, como ya sabemos, es un término más de nuestra ecuación de la energía.

La naturaleza de la fricción en una tubería depende de la característica del flujo que circula a través de ella.

Si el flujo posee líneas de corriente aproximadamente paralelas y las partículas de este se desplazan de manera ordenada y suave, se considera que es un *flujo laminar*.

Si, por el contrario, las partículas de fluido se desplazan de manera caótica y desordenada, se habla de un *flujo turbulento*.

Una experiencia que posiblemente hayamos realizado es encender una varita de incienso (figura 87). Obsérvese que la estela de humo presenta un patrón ordenado (laminar) en la zona cercana a la ceniza. Más arriba el flujo se torna desordenado (turbulento).



Figura 87. El humo de una varita de incienso forma flujos laminares y turbulentos.

Para el caso anterior es relativamente sencillo observar la diferencia, pero en el caso de una tubería con fluidos ocultos, la determinación es más compleja.

El problema anterior (nada sencillo) es un ejemplo de los muchos que hay en mecánica de fluidos en donde el desarrollo experimental permite el avance en la teoría.

A nivel experimental, se observa que los fluidos con baja viscosidad tienen la tendencia a generar flujos turbulentos (figura 88).

Mientras que los fluidos viscosos, aun cuando llegasen a ser muy densos, tienen patrones de flujo más laminares (figura 89).

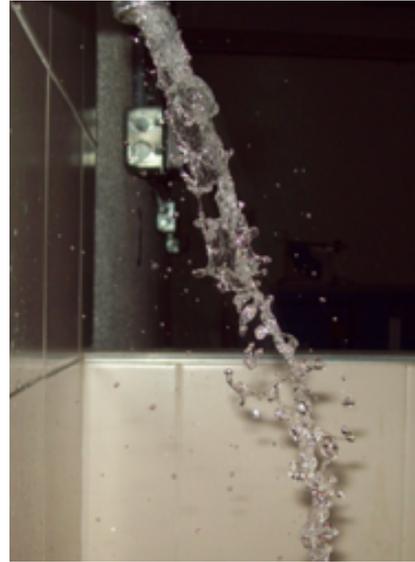


Figura 88. Flujo turbulento formado por un chorro de agua.



Figura 89. Flujo laminar formado por un fluido viscoso.

Las anteriores observaciones llevaron a que el ingeniero irlandés Sir Osborne Reynolds (1842-1912) estudiara estos fenómenos y propusiera que la tendencia a formar flujos laminares o turbulentos en un fluido dependía de la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas. Esta relación se establece matemáticamente como

$$\frac{F_{inerciales}}{F_{viscosas}} = \frac{\rho V_{prom} D}{\mu} \quad (222)$$

La relación anterior se conoce como número de Reynolds (R_e):

$$R_e = \frac{\rho V_{prom} D}{\mu} = \frac{V_{prom} D}{\nu} \quad (223)$$

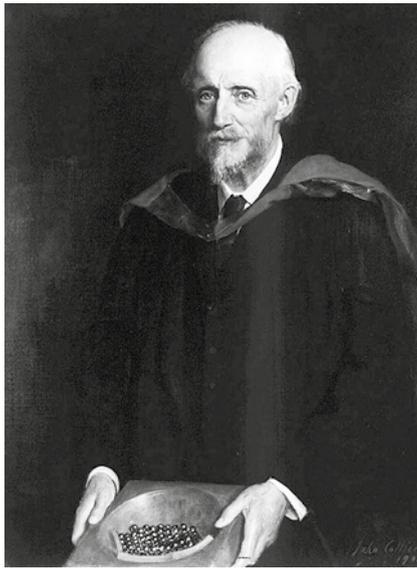


Figura 90. Sir Osborne Reynolds (1842-1912), por John Collier (1904).
Fuente: Dominio público (bit.ly/2ED5qiz).

Con ν como la denominada viscosidad cinemática:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (224)$$

Como se puede observar, el número de Reynolds carece de unidades; por lo tanto, constituye lo que se denomina un grupo adimensional.

La viscosidad cinemática tiene como unidades los Stokes (St): $1 (ST) = 1 \text{cm}^2 / \text{s}$.

Adicionalmente, Reynolds encontró que los valores de R_e dentro de los cuales se caracterizan las características del flujo son los siguientes:

Flujo laminar: $R_e \leq 2300$

Flujo de transición: $2300 \leq R_e \leq 4000$

Flujo turbulento: $R_e \geq 4000$

Hay que tener en cuenta que, para tuberías no circulares, el término correspondiente al diámetro se redefine como **diámetro hidráulico**:

$$D_h = \frac{4A}{p} \quad (225)$$

Donde A es el área transversal y p se denomina *perímetro mojado*. Esta definición se establece para lograr que el diámetro hidráulico se reduzca al diámetro circular en este tipo de tubería.

Para el análisis de la fricción, primero debemos encontrar cómo es el perfil de velocidades en el interior del fluido. Como estamos en el caso de un flujo laminar, cabe pensar que las capas de fluido se desplazan de manera paralela entre ellas y que las partículas no tienen velocidad en la dirección radial de la tubería. El perfil de velocidad corresponde a una función matemática que nos entrega el valor de velocidad de la capa según la distancia radial a la cual está ubicada.

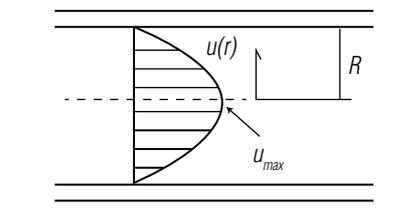


Figura 91. Distribución de velocidades en un flujo laminar.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 170).

Aplicando segunda ley de Newton a elementos de fluido en forma de disco se llega a que la distribución de velocidades es de la forma:

$$u(r) = 2V_{prom} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (226)$$

Donde V_{prom} es la velocidad promedio que se calcula normalmente con la ecuación de continuidad. Ahora bien, nos interesa calcular la pérdida de presión en un tramo de tubería. Esta pérdida de presión la definiremos como:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_1 - P_2}{L} \quad (227)$$

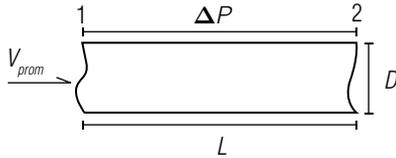


Figura 92. Concepto de pérdida de presión en un ducto.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 171).

Esta pérdida de presión se puede relacionar con la velocidad promedio, así:

$$P_1 - P_2 = \frac{8\mu L V_{prom}}{R^2} = \frac{32\mu L V_{prom}}{D^2} \quad (228)$$

Para tuberías inclinadas, existe un término adicional correspondiente al peso del fluido bombeado. La distribución de velocidad ahora es de la forma:

$$u(r) = 2V_{prom} \left(\frac{dP}{dx} + \rho g \sin \theta \right) \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (229)$$

Y la pérdida de presión será entonces:

$$P_1 - P_2 = \frac{32\mu L V_{prom}}{D^2} + \rho g \sin \theta \quad (230)$$

Ahora bien, recordando la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\dot{V} = V_{prom} \cdot A \quad (231)$$

Despejemos la velocidad promedio:

$$V_{prom} = \frac{\Delta P D^2}{32\mu L} \quad (232)$$

De la ecuación de continuidad se calcula ahora el caudal:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{\Delta P D^2}{32\mu L} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \\ \dot{V} &= \frac{\pi \Delta P D^4}{128\mu L} \end{aligned} \quad (233)$$

Esta ecuación se conoce como la **ecuación de Hagen-Poiseuille** o **flujo de Hagen-Poiseuille**. Se le atribuye al trabajo de los ingenieros Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884) y Jean Léonard Marie Poiseuille (1797-1869).



Figura 93. Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen. Fuente: Dominio público (bit.ly/2MgyWfU).



Figura 94. Jean Léonard Marie Poiseuille.
Fuente: Dominio público (bit.ly/2GwgN9U).

En la historia de la ciencia es común que varias personas trabajen una temática de forma independiente y que dos de estas personas (o equipos de trabajo) lleguen a conclusiones similares o iguales.

Es así como el ingeniero francés Henry Darcy (1803-1858) y el ingeniero alemán Julius Ludwig Weisbach (1806-1871) abordaron el mismo problema, pero de forma netamente experimental, y propusieron que las pérdidas de presión en tuberías se podían expresar en la siguiente forma:

$$\Delta P = f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{prom}^2}{2} \quad (234)$$

Donde f se conoce como **factor de fricción de Darcy** y la ecuación completa se conoce como la **ecuación de Darcy-Weisbach**.

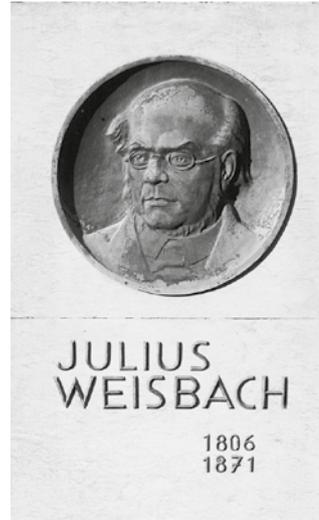


Figura 95. Julius Weisbach (1806-1871).
Monumento en Freiberg, Alemania.
Fuente: Wikipedia. Licencia WikiCommons (bit.ly/2ZfybXW).

Igualando las dos ecuaciones anteriores y despejando el factor de fricción de Darcy, se tiene:

$$f \frac{L}{D} \frac{\rho V_{prom}^2}{2} = \frac{32\mu LV_{prom}}{D^2} \quad (235)$$

$$f = \frac{64\mu}{LDV_{prom}} = \frac{64}{R_e}$$

Retomando la filosofía de la ecuación de Bernoulli y la ecuación de la energía, la pérdida de presión puede expresarse en términos de pérdida de altura:

$$h_L = f \frac{L}{D} \frac{V_{prom}^2}{2g} \quad (236)$$

Que será una parte de nuestro término de pérdidas en la ecuación de energía.

Flujo turbulento

Para el caso del flujo turbulento, a pesar del cambio de velocidad que experimentan las partículas

de fluido en el tiempo, se pueden hacer los análisis tomando una velocidad media en el tiempo. Así, también se puede proponer un perfil de velocidad, que será función de la coordenada radial.

En un flujo turbulento totalmente desarrollado se pueden definir cuatro capas o regiones, a saber:

- Capa viscosa o laminar
- Capa de amortiguamiento
- Capa de traslape, transición o inercial
- Capa exterior o turbulenta

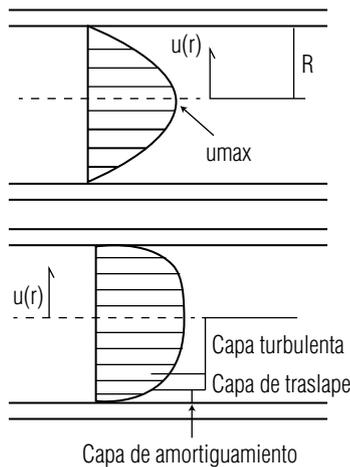


Figura 96. Perfiles de velocidades en flujo turbulento y en flujo laminar.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 171).

A pesar de que la capa laminar es una capa muy delgada (menos del 1% del diámetro), sus características determinan el régimen de flujo para el resto de la tubería. Algo que puede afectar las características de esta capa es la rugosidad de la superficie interior de la tubería.

La rugosidad comienza a tener significado cuando el tamaño de la aspereza ϵ es significativo con respecto al diámetro interior de la tubería.

Los trabajos del científico soviético Johann Nikuradse (1874-1979), en 1933, establecieron que el factor de fricción de Darcy para el caso de flujo turbulento dependía del número de Reynolds y de la rugosidad relativa (relación entre el tamaño de la aspereza y el diámetro interno). Estos resultados se presentaron en forma de tablas y nomogramas obtenidos por ajuste de curvas.

En 1939, el profesor Cedric Masey White (1898-1993), en asocio con su estudiante de doctorado Cyril Frank Colebrook (1910-1997), analizaron los trabajos de Nikuradse y encontraron una relación implícita para el factor de fricción de Darcy que se conoce como la **ecuación de Colebrook-White**²¹; se presenta a continuación:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -2.0 \log \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \right) \quad (237)$$

Obtener f no es tarea fácil. De hecho, solo se puede lograr de manera aproximada, como se verá más adelante. Esta ecuación, como muchas otras en la mecánica de fluidos, son ecuaciones de tipo experimental o empírico. Estas ecuaciones son resultado del análisis de los datos de un experimento, y no son derivadas de un proceso deductivo a partir de un modelo físico, como se han obtenido las formulaciones y en lo se lleva hasta acá del presente trabajo. Es un ejemplo de los muchos que pueden existir en la mecánica de fluidos, en donde se demuestra que es posible obtener teoría a partir de la experimentación.

21 En la gran mayoría de libros, esta ecuación experimental se conoce simplemente como la ecuación de Colebrook. Sin embargo, revisando artículos que tratan sobre la obtención de esta relación, se atribuye al trabajo de ambos científicos. Aquí la denominaremos como *ecuación de Colebrook-White*.

Para 1942, el ingeniero estadounidense Hunter Rouse (1906-1996) verificó la ecuación de Colebrook y la expresó gráficamente. Dos años después, el ingeniero Lewis Ferry Moody (1880-1953) redibuja estas gráficas y crea el famoso diagrama de Moody, ampliamente utilizado en el cálculo de factores de fricción en tubería (figura 97).

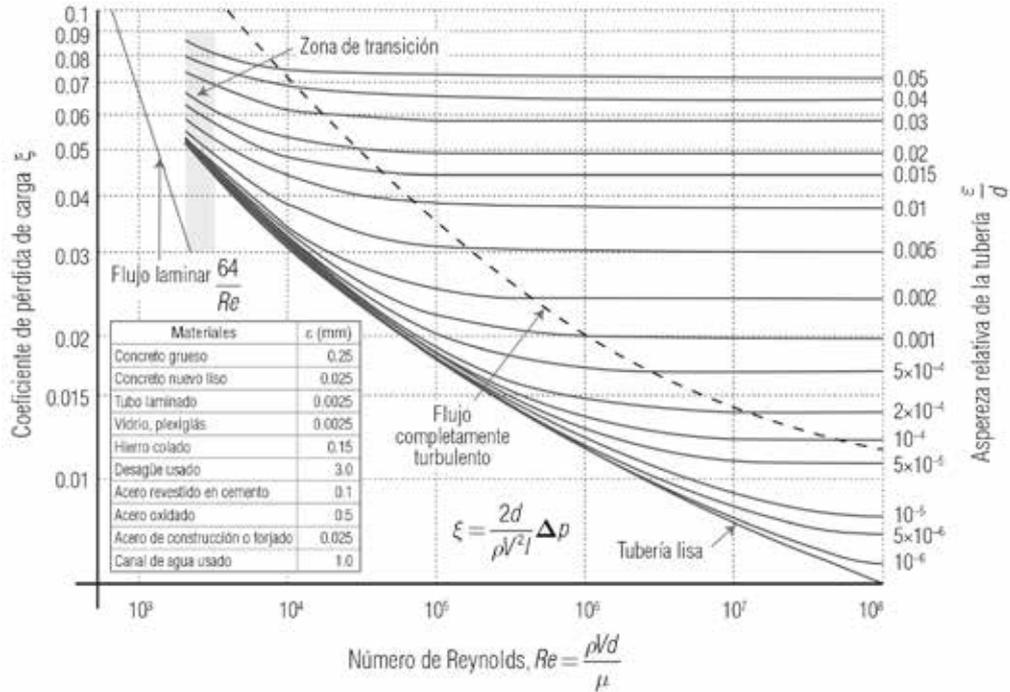


Figura 97. Diagrama de Moody.

Fuente: Elaboración propia con base en Marc.derumaux (Wikipedia).
Licencia WikiCommons (bit.ly/2ZcOnJl).

No obstante, los resultados que entrega el diagrama de Moody son aproximados y se considera que pueden tener un error de hasta el 15%. Es posible que en la práctica profesional se tenga que hacer uso de formas explícitas para el factor de fricción de Darcy. Como ejemplo se tiene, entre otras, la denominada ecuación de Halland:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} \cong -1.8 \log \left(\frac{6.9}{Re} + \left(\frac{\epsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right) \quad (238)$$

Nótese que, para números de Reynolds grandes, el factor de fricción se estabiliza y se hace independiente del número de Reynolds. La región donde sucede esto se conoce como *región de flujo turbulento totalmente rugoso*. Aquí el factor de fricción se puede obtener por medio de la *ecuación de von Karman*.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.0 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right) \quad (239)$$

Este coeficiente K_L lo obtienen normalmente los fabricantes de accesorios de manera experimental. Así, las pérdidas menores se pueden encontrar a través de la ecuación:

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} \quad (241)$$

Pérdidas en accesorios

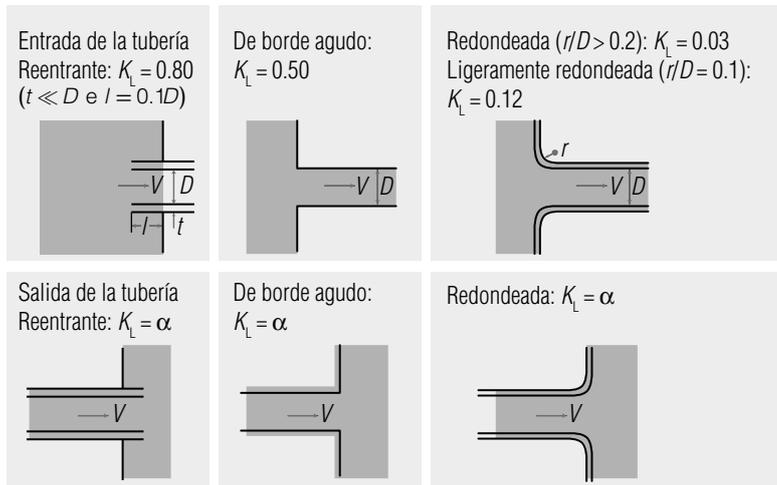
En un circuito hidráulico se utilizan normalmente codos, uniones, ensanchamientos, etc. Estas transiciones pueden alterar el suave movimiento del fluido, generando fenómenos de recirculación y contracción que implican pérdidas de energía y se denominan *pérdidas por accesorios* o *pérdidas menores*.

Las pérdidas menores se expresan en términos del coeficiente de pérdida, el cual se denomina K_L (conocido también como coeficiente de resistencia), definido por:

$$K_L = \frac{h_L}{V^2 / 2g} \quad (240)$$

Los accesorios pueden también tratarse inicialmente como un tramo ficticio de tubería cuyas pérdidas equivaldrían a las introducidas por los accesorios. Se habla entonces de la longitud equivalente de tubería. Igualemos la expresión anterior de las pérdidas por accesorios con la ecuación de Darcy-Weisbach.

En las figuras 98, 99 y 100 se muestran valores típicos de los coeficientes K_L para el caso de situaciones comunes de accesorios en tubería.



Nota: el factor de corrección de energía cinética es $\alpha = 2$ para flujo laminar totalmente desarrollado, y $\alpha = 1$ para flujo turbulento totalmente desarrollado.

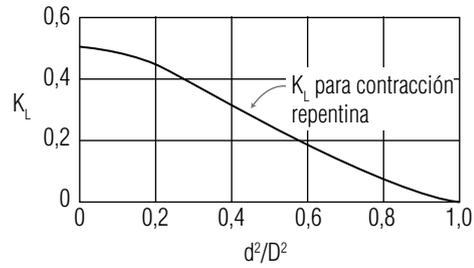
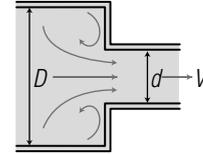
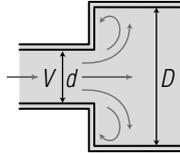
Figura 98. Valores de K_L para entradas y salidas en tuberías.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 350).

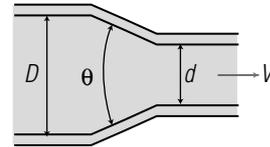
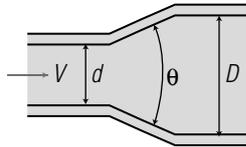
Expansión y contracción repentina
(con base en la velocidad en la tubería de diámetro más pequeño)

Expansión repentina: $K_L = \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$

Contracción repentina: ver gráfica



Expansión y contracción gradual
(con base en la velocidad en la tubería de diámetro más pequeño)

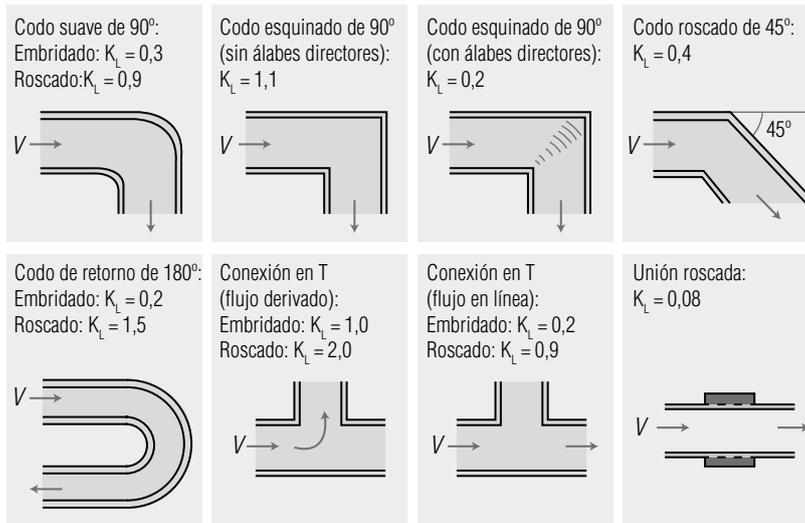


Expansión:
 $K_L = 0,02$ para $\theta = 30^\circ$
 $K_L = 0,04$ para $\theta = 45^\circ$
 $K_L = 0,07$ para $\theta = 60^\circ$

Contracción: (para $\theta = 20^\circ$)
 $K_L = 0,30$ para $d/D = 0,2$
 $K_L = 0,25$ para $d/D = 0,4$
 $K_L = 0,15$ para $d/D = 0,6$
 $K_L = 0,10$ para $d/D = 0,8$

Figura 99. Valores de K_L para expansiones y contracciones en tuberías.
Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 350).

Codos y ramificaciones



Válvulas

Válvula de globo totalmente abierta: $K_L = 10$
 Válvula de ángulo totalmente abierta: $K_L = 5$
 Válvula de bola totalmente abierta: $K_L = 0,05$
 Válvula de charnela: $K_L = 2$

Válvula de compuerta totalmente abierta: $K_L = 0,2$
 Válvula de compuerta, 1/4 cerrada: $K_L = 0,3$
 Válvula de compuerta, 1/2 cerrada: $K_L = 2,1$
 Válvula de compuerta, 3/4 cerrada: $K_L = 17$

Nota: Estos son valores representativos para coeficientes de pérdida. Los valores reales dependen principalmente del diseño y la fabricación de los accesorios y pueden diferir considerablemente de los valores dados (en especial para las válvulas).

Figura 100. Valores de K_L para codos, ramificaciones y válvulas en tuberías.

Fuente: elaboración propia con base en Çengel y Cimbala (2006, p. 350).

Ejercicio resuelto²²

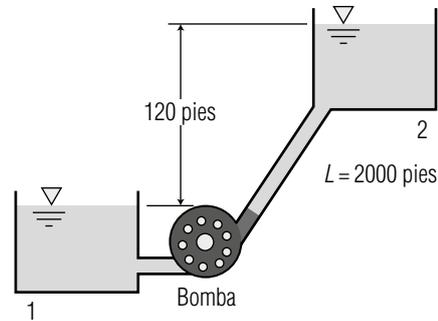
Agua a 20 °C ($\rho = 998 \text{ kg/m}^3, \mu = 1.0 \times 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$) es bombeada a través de

2000 pies de tubería desde un reservorio 1 hasta un reservorio 2 a razón de 3 ft³/s, como se muestra en la figura 101. Si la tubería es de hierro fundido con un tamaño de aspereza ϵ de 0.26 mm, tiene un diámetro de 6 pulg y la bomba trabaja en un punto de operación donde se garantiza un 75 % de eficiencia, ¿qué caballaje se requiere suministrar a la bomba?

22 Tomado de White (2003).

Solución

Se inicia calculando el número de Reynolds. Se realizará este problema en sistema inglés. Para ello se requiere inicialmente la velocidad a través del ducto, que puede calcularse aplicando la ecuación de continuidad.

**Figura 101.**

Fuente: White (2003, p. 410).

$$V = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{3 \frac{ft^3}{s}}{\frac{\pi(0.5 ft)^2}{4}} = 15.28 \frac{ft}{s} \quad (242)$$

Se convierte el valor de viscosidad dinámica del agua a sistema inglés:

$$\mu = 1.0 \times 10^{-3} \frac{kg}{m \cdot s} * \frac{2.2 lbm}{1 kg} * \frac{1 m}{3.28 ft} = 6.71 \times 10^{-4} \frac{lbm}{ft \cdot s} \quad (243)$$

Calcúlese ahora la viscosidad cinemática:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{6.71 \times 10^{-4} \frac{lbm}{ft \cdot s}}{62.4 \frac{lbm}{ft^3}} = 1.075 \times 10^{-5} \frac{ft^2}{s} \quad (244)$$

Ahora el número de Reynolds es:

$$R_e = \frac{15.28 \frac{ft}{s} * 0.5 ft}{1.075 \frac{ft^2}{s}} = 710770 = 7.1 \times 10^5 \quad (245)$$

Lo cual establece que el régimen del flujo corresponde a un flujo turbulento. Para utilizar el diagrama de Moody, se requiere saber adicionalmente el valor de aspereza relativa. Teniendo presente que el diámetro de la tubería es de 6 pulg, dicho valor viene dado por la siguiente ecuación:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.26mm}{6 * 25.4mm} = 0.017 \quad (246)$$

Con estos datos, se lee un valor para el factor de fricción de Darcy (f) de 0.0225 en el diagrama de Moody. La pérdida de fricción a lo largo de la tubería se halla con la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_{perd} = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = 0.0225 * \frac{2000 ft}{0.5 ft} * \frac{\left(15.28 \frac{ft}{s}\right)^2}{2 * 32.2 \frac{ft}{s^2}} = 326 ft \quad (247)$$

Planteemos ahora la ecuación de la energía:

$$\frac{P_1}{\gamma_{H_2O}} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + h_b = \frac{P_2}{\gamma_{H_2O}} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 + h_{perd} \quad (248)$$

$$h_b = Z_2 + h_{perd} = 120 ft + 326 ft = 446 ft \quad (249)$$

Se halla ahora la potencia de bombeo:

$$\dot{W}_b = \gamma_{H_2O} \dot{V} h_b = 62.4 \frac{lb}{ft^3} * 3 \frac{ft^3}{s} * 446 ft * \frac{1 hp}{550 \frac{lb \cdot ft}{s}} = 151 hp \quad (250)$$

El trabajo a suministrar a la bomba es:

$$\dot{W}_{ent} = \frac{\dot{W}_b}{\eta} = \frac{151 hp}{0.75} = 201 hp \quad (251)$$

Bibliografía

- Beer, F. (1997). *Mecánica vectorial para ingenieros. Estática*. McGraw-Hill.
- Çengel, Y. y Cimbala, J. (2006). *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill.
- Crespo, A. (2006). *Mecánica de fluidos*. Thomson.
- Crowe, C. T. (2001). *Engineering fluid mechanics*. John Wiley & Sons.
- Oliver, X. (2002). *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Alfaomega.
- Pritchard, P. J. (2011). *Forx and Macdonald's introduction to fluid mechanics*. John Wiley & Sons.
- Rowlett, R. (2018). *A dictionary of units of measurement*. University of North Carolina at Chapel Hill. <http://www.ibiblio.org/units/>
- Streeter, V. (1981). *Mecánica de los fluidos*. McGraw-Hill.
- White, F. M. (2003). *Fluid mechanics* (5.^a ed.). McGraw-Hill.



La preparación editorial de *Mecánica de fluidos:*
guía de estudio estuvo a cargo
de Ediciones Universidad Central.

Se utilizaron en su composición fuentes Minion Pro
y Serifa Std. Se publicó en Bogotá en diciembre de 2020.

“ [...] Todo en la vida tiene que ver con la mecánica de fluidos: los desarrollos de las grandes máquinas, los fenómenos naturales, incluso la vida misma, dependen de unos sencillos principios que fueron descubiertos en tiempos inmemoriales de la humanidad. Estos sencillos principios tienen expresiones complejas que describen fenómenos asombrosos, pero simplemente son una nueva representación (avanzada) de unos principios muy elementales. Esto indica que es una materia eminentemente conceptual, y el éxito o fracaso de un estudiante tanto novato como avanzado depende de la aplicación o el olvido de esta característica.”

Profesor Alejandro Muñoz Rodríguez

Esta guía de estudio surge de la experiencia de su autor como profesor de la asignatura de Mecánica de Fluidos en el Departamento de Ingeniería Mecánica. Explora 5 unidades fundamentales: los fundamentos de la mecánica de fluidos, las propiedades de los fluidos, la hidrostática, la hidrodinámica y, finalmente, las pérdidas hidráulicas en tuberías y accesorios. Ofrece un recorrido teórico introductorio, en busca de que los estudiantes se apropien de los fundamentos conceptuales y los utilicen de forma crítica, en aras de desarrollar su habilidad de abordar problemas y deducir la mejor solución metódica, más que solo memorizar procedimientos.



UNIVERSIDAD
CENTRAL